# DESIGVALDADES DE BELL

## O acerca de si el modelo propvesto por la mecánica cvántica implica vna interpretación no realista y no local del vniverso o es, sencillamente, sólo vn modelo pvramente instrvmentalista y que debe interpretarse como vn mero prototipo a falta del conocimiento de variables ocvltas. Analicemos las Desigvaldades de Bell y sv variación CHSH.

*Per JOHANNES SVLIS*

*S E V I L L A - T O R R E - F V E N T E S*

*MMXXIII*

---

*SIN LICENCIA (ni falta) DE LA AVTORIDAD*

*PROPOSITIO IV: Duæ aut plures res distinctæ vel inter se distinguuntur ex diversitate attributorum substantiarum vel ex diversitate earundem affectionum.*

*DEMONSTRATIO: Omnia quæ sunt vel in se vel in alio sunt (per axioma 1) hoc est (per definitiones 3 et 5) extra intellectum nihil datur præter substantias earumque affectiones. Nihil ergo extra intellectum datur per quod plures res distingui inter se possunt præter substantias sive quod idem est (per definitionem 4) earum attributa earumque affectiones. Q.E.D.*

*"Ethica, ordine geometrico demonstrata". Benedictus de Spinoza*

Qué elegante es el paradigma de la Física clásica[1]. Qué plácido, qué ordenado, qué intuitivo y qué *predecible*. Qué indómita belleza la del modelo de la Física cuántica. Qué inquietante, qué caótico, qué salvaje y qué *impredecible*.

Siempre me he preguntado cuál de los dos "mundos" me hace sentir más cómodo. La normalización del primero me asombra como pudiera hacerlo la serenidad de un majestuoso templo de la península Ática que a alguna costa del Egeo asoma. Sin embargo, en ocasiones, deseo adentrarme en lo profundo del bosque y sentarme al pie de un altar, al dios Pan dedicado, y del que mana una cantarina y caótica fuente de agua fría, néctar y leche dulce. Allí, sentado al anochecer, me deleitaría con el sonido del aulós que faunos danzantes tocarían reproduciendo al *caos* cuántico.

Algo así, me gusta imaginar, aunque seguro que no tan bucólico, debían pensar las dos diferentes *escuelas* de físicos a finales de los años 20 y cuyas cabezas más preminentes fueron Albert Einstein, como defensor del

[1] Por supuesto, incluimos también en este paradigma al Universo descrito por la Física relativista.

*realismo*[2], y Niels Bohr como máximo exponente de la interpretación de Copenhague[3].

Einstein se negaba a aceptar que la realidad, a escala cuántica, estuviera indefinida como a la espera de ser observada para concretarse en un estado definido. Se negaba a aceptar que una partícula pudiera permanecer, antes de ser medida u observada, en un estado de indefinición, de superposición[4].

Por supuesto, tampoco aceptaba, pues ello violaría uno de los principales axiomas de su modelo relativista[5], que dos partículas alejadas por una distancia indeterminada pudieran comunicarse de manera inmediata empleando una suerte de espeluznante acción a distancia[6]. Se negaba a que, lo que posteriormente se denominó estado de entrelazamiento cuántico, fuera siquiera posible en nuestro universo. Ni Dios[7] jugaba a los dados ni la Luna aparecía sólo cuando uno miraba.

Para tratar de poner algo de orden en este debate, el matemático John von Neumann propuso un modelo matemático, alineado con los postulados cuánticos, que adelantaba que, en esta ocasión, Einstein podría estar equivocándose. Dicho trabajo, por su nivel de abstracción y ante las renuencias de los físicos teóricos de la época, pasó, podríamos decir, en cierta medida desapercibido. No fue hasta 1964 cuando el físico irlandés John Stewart Bell retomó el trabajo de von Neumann y propuso un modelo más simplificado de las desigualdades inicialmente propuestas para probar, precisamente, que la Teoría Cuántica era incompatible con un modelo realista y local al mismo tiempo (más adelante veremos con más detalle a

---

[2] Así es como la historia del pensamiento y la divulgación científica, bajo mi punto de vista, empiezan a embrollar el asunto: por la falta de rigor y el mal uso de las palabras. La palabra a usar aquí no debería ser "realismo" sino algo más parecido a "concretismo" o "definitivismo". Albert Einstein no decía que lo observado a escala cuántica no fuera real sino que la realidad observada a dicha escala no podía ser tan difusa como proponía la mecánica cuántica sino que las partículas subatómicas estaban perfectamente "concretadas" al modo clásico aunque nosotros, por desconocimiento de alguna serie de variables ocultas, aún las percibíamos en un estado difuso.

[3] Esta polémica es extensamente conocida y si se desea saber algo más sobre ella basta con googlear un poco para ponerse al día.

[4] Einstein era, pues, defensor de lo que se ha denominado, confusamente, *realismo*, aunque creo que sería más apropiado llamarlo "*concretismo*".

[5] Nada en el universo puede viajar a más velocidad que la de la luz.

[6] *Spooky action at a distance.*

[7] Mucho menos el Dios de Spinoza, que sigue sin jugar a los dados, aunque es cierto que hace cosas muy extrañas. ¿Pero qué vamos a decir nosotros que sólo percibimos atributos y modos de la Sustancia?

qué nos referimos con esto). A estas desigualdades se las conoce como las Desigualdades de Bell.

5 años más tarde, en 1969, los físicos John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony y Richard A. Holt (a partir de ahora, el grupo CHSH) propusieron un modelo para probar experimentalmente la veracidad empírica de las Desigualdades de Bell, en este punto, Desigualdades en la forma CHSH de los sistemas a escala cuántica.

Hubo que esperar hasta 1982 para que el desarrollo de la tecnología permitiera realizar el experimento propuesto por las Desigualdades de Bell en su forma CHSH. Fue el físico francés Alain *bigotitos* Aspect el que se encargó de llevar a cabo dicho experimento demostrando, empíricamente, la ruptura de dichas desigualdades. Alain *bigotitos* Aspect acabó recibiendo el Premio Nobel de Física junto a John F. Clauser y Anton Zeilinger por sus aportaciones al estudio de la Física Cuántica.

Para poder entender internamente estos desarrollos teóricos vamos a abordar previamente una serie de consideraciones.

*PROPOSITIO XIII: Substantia absolute infinita est indivisibilis.*

*DEMONSTRATIO: Si enim divisibilis esset, partes in quas divideretur vel naturam substantiæ absolute infinitæ retinebunt vel non. Si primum, dabuntur ergo plures substantiæ ejusdem naturæ, quod (per propositionem 5) est absurdum. Si secundum ponatur, ergo (ut supra) poterit substantia absolute infinita desinere esse, quod (per propositionem 11) est etiam absurdum..*

*"Ethica, ordine geometrico demonstrata". Benedictus de Spinoza*

## Sección I.

## ¿Por qué las desigualdades de Bell?

Cuando en el estudio de la naturaleza, a través de las ciencias físicas, se menciona la distinción entre los paradigmas clásico y cuántico hemos de recurrir a una conceptualización que hunde sus raíces en tres problemas fundamentales:

A. El problema de la Inferencia Inductiva. ¿Hasta qué punto es formalmente válido generar una ley universal a partir de un número determinado, por inmenso que éste sea, de observaciones particulares?[8]

B. El problema de la Realidad[9]. A escala cuántica[10], ¿existe, de manera fija, una determinada propiedad de una partícula antes de ser

[8] Para comprender este problema desde su origen formal nada mejor que acudir a la siempre interesante obra del filósofo escocés David Hume, especialmente, *A Treatise of Human Nature: Being an Attempt to Introduce the Experimental Method of Reasoning into Moral Subjects* (1739–40).

[9] Insistimos en que el término "realidad" quizás no sea el más apropiado, al menos, en castellano.

[10] Para hablar de la naturaleza susceptible de ser estudiada mediante la Mecánica Relativista apelamos a la contante $c$: la velocidad de la luz, que equivale a $3 \cdot 10^8 m/s$. Cuando un cuerpo se mueve a velocidades cercanas a la velocidad de la luz, hemos de abandonar la Mecánica Newtoniana para emplear la Teoría elaborada por A. Einstein. Similarmente, cuanto estamos tratando con objetos de estudio de un tamaño cercano a la constante de Planck, $h = 6{,}62607015 \cdot 10^{-34}\ joules \cdot s$, decimos que la fenomenología debe abordarse desde los postulados de la Mecánica Cuántica.

observada? Es decir, si el espín de un electrón puede ser +1 o -1, ¿está, en el electrón, definida, concretada, esa propiedad como +1 ó -1 antes de ser éste sometido a la observación de esa propiedad?

C. El problema de la localidad. Lejos *habían* quedado, en la década de los años veinte del siglo pasado, los tiempos en los que una acción instantánea a distancia atraía al conjunto de los planetas de nuestro sistema hacia el Sol. La Teoría de la Relatividad ha demostrado ya en incontables ocasiones que no existe interacción posible que viaje más rápido que la velocidad de la luz. Para ilustrar esto imaginemos que mañana, súbitamente, desapareciera el Sol. La Tierra tardaría aproximadamente 8 minutos, el tiempo que tarda un fotón en recorrer la distancia que separa al Sol de la Tierra, en percibirlo. Es decir, la deformación del espacio-tiempo inducida por la masa del Sol, la onda gravitatoria, tardaría unos 8 minutos en alcanzar la Tierra y, sólo a partir de ese momento, ésta comenzaría a vagar libremente por el firmamento. Los entes se relacionan entre ellos sólo si están dentro del cono de luz de los eventos y las interacciones posibles. Sólo se relacionan causalmente si están "localmente" cercanos; sólo si son accesibles a la velocidad de la luz. Por ejemplo, un fotón que escape de nuestra linterna, desde el mismo momento en que parta de ésta, deja de estar bajo nuestra influencia causal pues al alejarse de nosotros a la velocidad de la luz, no hay manera de que volvamos a interaccionar con él. Nada viaja más rápido que la velocidad de la luz y, por lo tanto, definitivamente, habrá sobrepasado todos los límites de nuestra existencia.

Ahora, para avanzar en nuestra exposición, usemos una analogía que nos servirá para ilustrar la importancia de las Desigualdades de Bell a la hora delimitar la realidad estudiada por los dos grandes modelos teóricos en física: la mecánica relativista y la mecánica cuántica. Imaginemos a un psicólogo que ha diseñado un test sin otra finalidad más allá de que lo cumplimenten diferentes sujetos y aquél arroje resultados que denominaremos como positivos o negativos. Dicho test tiene una muy peculiar particularidad: el psicólogo no sabe muy bien cómo lo ha configurado y, de hecho, no sabe siquiera qué mide. Nuestro psicólogo, sencillamente, ha podido observar que hay sujetos que lo pasan (resultado positivo) y otros que no (resultado

negativo). No es capaz de encontrar una propiedad que pueda estar siendo medida por el test que, en apariencia, sólo arroja resultados azarosos. Parece casi que los sujetos lo cumplimentan con los ojos cerrados. El test parece, sencillamente, una fuente de azar. Es imposible saber qué resultado va a obtener un sujeto al realizarlo. Por supuesto, no sabe cómo categorizar en dos grupos diferentes, según manifiesten una propiedad o no, a las personas que obtienen resultados positivos frente a las personas que obtienen resultados negativos. Nunca podrá saber, con esta información, qué está sucediendo. De hecho, puede que no suceda nada en absoluto ya que parece que está ante un proceso puramente estocástico.

Nuestro psicólogo, en cambio, es muy perseverante y, sospechando que hay algo que se le está escapando, persiste en hacer el test una y otra vez a todo aquel que pasa por su consulta. Así continúa durante meses hasta que un buen día observa una muy curiosa particularidad. Un dato que le induce a pensar que quizás haya una causa que nos permita identificar si hay alguna causa oculta que el test está midiendo de alguna manera. Observa, para su sorpresa, que cuando pasa el test a pares de individuos casados, si el marido obtiene un resultado, automáticamente (o al menos en un inmenso número de ocasiones[11]), su mujer (sin que haya comunicación entre ellos[12]) obtiene el resultado contrario. Es decir, cuando un miembro de la pareja obtiene un resultado positivo al realizar el test, el otro miembro, en absolutamente todos los innumerables casos que ha analizado, obtiene un resultado negativo (le lleva la contraria de manera persistente; no es tan exótico en el caso de un matrimonio). Observa dicha correlación negativa tantas veces que, claro, empieza a sospechar que quizás el test no arroja resultados puramente aleatorios sino que debe haber alguna propiedad compartida por la pareja que se manifiesta en sentido contrario y que hace que ambos obtengan resultados contrapuestos.

Nuestro psicólogo piensa sobre el asunto y colige que, efectivamente, aún es razonable pensar que el resultado del primero de los miembros de la pareja que haga el test es totalmente azaroso pero que, una vez asignado un resultado, el resultado del otro miembro de la pareja está ya condicionado por el resultado del otro miembro. Pero ¿cómo es esto posible si hemos dicho que entre ellos no cabe comunicación posible?

[11] Véase nota 8.

[12] En este escenario no hay posibilidad de que se comuniquen no localmente. Están en esferas inalcanzables.

O bien se han comunicado para acordar resultados (cosa que el psicólogo puede garantizar que no ha sucedido) o bien existe alguna propiedad oculta que hasta entonces le era huidiza. Piensa que debe existir una *variable oculta* hasta el momento que se le ha estado escapando y que es inherente a ambos miembros de la pareja y que podría justificar la persistente correlación negativa de los resultados de éstos.

Quizás la propiedad aparezca en los sujetos con total aleatoriedad; quizás es ése el origen de la aparente aleatoriedad observada, pero la correlación indicaría que dicha propiedad existe y es compartida por los dos miembros de la pareja antes de separarse para hacer los tests[13]. Es decir, a la correlación se le atribuye una causa común ya presente en la pareja antes del alejamiento para la realización del test (por supuesto, como hemos dicho, la comunicación entre ellos, está descartada).

Llegados a este punto, el psicólogo, y cualquiera de nosotros, hará una extensión inductiva y emitirá una ley probabilística que, para un muestreo determinado (mientras mayor sea la muestra, más fuerte será la ley), afirmará que las parejas están correlacionadas inversamente en la posesión o manifestación de una propiedad.

Hasta aquí estamos aceptando las tres premisas *problemáticas* fundamentales que introducíamos al principio:

A. La extensión de la inferencia inductiva.

B. La existencia de una Realidad previa al estudio (una variable oculta preexistente).

C. La localidad del fenómeno estudiado (no existe la posibilidad de comunicación no local entre los miembros de las parejas estudiadas[14]).

[13] Hipótesis de Realidad o existencia de la propiedad ya concretada en un estado preexistente a la observación.

[14] Comunicación superlumínica.

Procediendo así, el psicólogo estaría actuando de una manera perfectamente razonable… en el caso, como es el suyo, de un fenómeno propio del Mundo Clásico.

En cambio, un epistemólogo versado en los fenómenos que se producen a escala cuántica dirá, para sorpresa del psicólogo, que la aceptación de estas tres premisas no son, en absoluto, evidentes, ya que la realidad a dicha escala es muy diferente a la del Mundo Clásico. En su propia defensa dirá que en los fenómenos observados en el Mundo Cuántico hay numerosos experimentos que demuestran que su aparentemente polémica cautela es, sin embargo, metodológicamente imprescindible.

En el caso de la Mecánica Cuántica la función de onda de Schrödinger puede definir, para entidades de magnitud del orden de la constante de Planck, un estado muy extendido en el espacio. La probabilidad de encontrar la partícula en un lugar concreto vendría dada por el cuadrado de la función de onda en ese punto. Cuando se mide, ciertamente, la función de onda que describe el sistema colapsa y la partícula pasa a estar en un lugar concreto, que puede ser o no ser el lugar en el que hemos concretado nuestra medida[15]. No conocemos dónde va a estar la partícula, sólo la probabilidad[16]. Ante el choque anti-intuitivo que supone para nuestro modelo de comprensión este tipo de comportamientos, nos hacemos preguntas que se parecen a las que se hacía el psicólogo con su test y la esquiva concreción de una propiedad: ¿estaba la partícula ahí pero se nos mostraba difusa y por falta de datos nosotros no acabábamos de verlo? En el Mundo Cuántico todo apunta a que no.

El psicólogo (y Albert Einstein[17] con él) diría que la partícula estaba bien definida, pero que nos faltaban datos, y por eso no sabíamos con certeza dónde estaba.

---

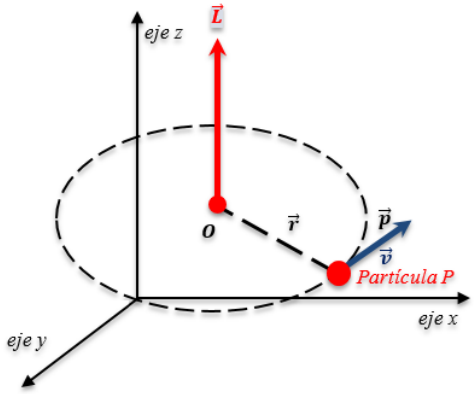
[15] Importante: no es que acertemos probabilísticamente. La partícula está en ningún sitio y en todos a la vez, como extendida en el espacio, y sólo pasa a estar concreta en un lugar concreto descrito estadísticamente, tras la medición.

[16] El conocimiento humano aún no sabe por qué esto es así.

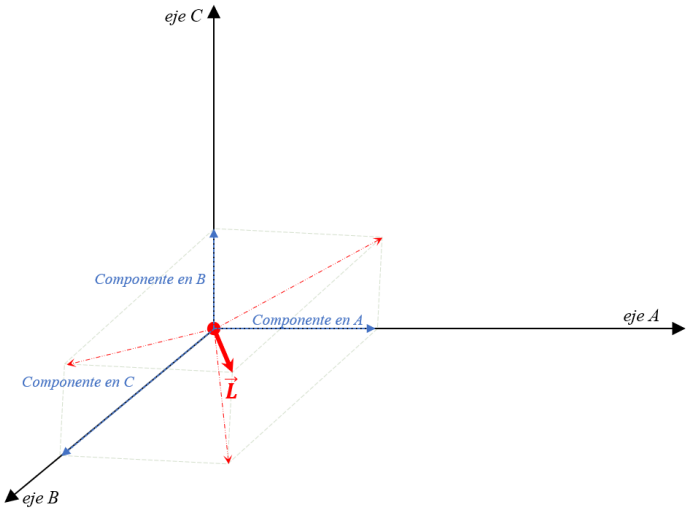
[17] Einstein no decía que la Mecánica Cuántica fuera errónea con carácter general sino que era incompleta, es decir, que le faltaban variables para ser precisa. No decía que fuera inconsistente, a excepción de la comunicación no local (superlumínica). Saber si hay o no hay variables ocultas no *implicaba* mejor funcionamiento del modelo o mejores resultados de experimentación. Este dilema, en la época de Einstein, era una cuestión metafísica. Hoy en cambio existe tecnología para que este dilema sí que afecte a los resultados obtenidos por lo que hoy es una cuestión que va más allá del conocimiento ontológico.

Imaginemos ahora que en vez de con personas estamos tratando con protones. Imaginemos que el test que empleamos es un test que mide el espín[18] de una partícula y que es un físico el que hace los experimentos.

[18] Antes de proseguir es importante conocer un poco acerca de la naturaleza del espín de una partícula. El espín de una partícula es, salvando las distancias, ***instrumentalmente*** análogo al momento angular de un objeto macroscópico. El momento angular es el equivalente rotacional al momento lineal de un cuerpo en movimiento de translación. Así, el momento angular se representa como una magnitud vectorial que caracteriza las propiedades de inercia de un cuerpo que gira en torno a un punto. Gráficamente, el momento angular $\vec{L}$ de una partícula que traza una trayectoria rotacional en torno a un punto O es perpendicular al plano formado por $\vec{r}$ (radio) y $\vec{p}$ (trayectoria de la partícula) y su sentido se determina por la regla de la mano derecha:




Por supuesto, dicho vector se proyecta sobre los diferentes ejes en un espacio de tres dimensiones pudiendo obtener cada una de las tres componentes del vector $\vec{L}$.




En el mundo clásico, macroscópico, alejado de la magnitud de la constante de Planck, las componentes de cada una de las tres dimensiones, la proyección del vector en cada eje, podrán adoptar valores continuos que vayan desde cero hasta donde sea necesario. En el mundo cuántico, en cambio, para el espín de una entidad, que se representa también como un vector, y aunque realmente tiene más que ver con las propiedades electromagnéticas de la entidad que con rotación alguna, también podemos obtener las componentes en cada uno de los ejes pero, como decimos, encontramos una particularidad muy importante: los valores que se adoptan son discretos. No adoptan valores bajo la forma de una magnitud continua sino de dos posibles valores discretos que podemos denominar como + ó -. Es igualmente importante saber que cuando medimos la componente (+) del espín de una partícula en un eje, podemos estar seguros al 100%

El físico, al igual que hacía el psicólogo con los sujetos individualmente, procede a aplicar el test que, como hemos dicho, mide el espín[19] de una amplia batería de protones, uno a uno, sobre un mismo eje, por ejemplo, el eje A (llamemos, con fines didácticos, al eje x, eje A). Efectivamente, para dichos protones individualmente tratados, empieza a obtener valores sobre los que no es capaz de proyectar ninguna hipótesis más allá de que dichos valores surgen aleatoriamente, justo como le pasaba al psicólogo.

Mide la componente en el eje A del vector que caracteriza al espín de los protones individuales y obtiene valores aleatorios:

$$A^+, A^-, A^-, A^+, A^+, A^+, A^-, A^+, A^+, A^-, A^-, A^+, A^- \ldots$$

Cuando mide la componente del vector en el eje B (digamos que es el eje y), análogamente, obtiene medidas totalmente azarosas de nuevo para otros protones:

$$B^-, B^+, B^-, B^+, B^-, B^+, B^-, B^-, B^+, B^+, B^-, B^+, B^+ \ldots$$

E igualmente en el eje C (pudiera ser el eje z):

$$C^+, C^+, C^-, C^-, C^-, C^-, C^+, C^+, C^+, C^-, C^-, C^+, C^- \ldots$$

(inductivamente) que su partícula emparejada presenta una medición opuesta (-) en el mismo eje. Más adelante entenderemos perfectamente a qué nos referimos.

[19] Es cierto que hemos dicho que el psicólogo no sabía si su test estaba midiendo alguna propiedad. Ahora, suponiendo un paralelismo, hemos dicho que el físico está midiendo una propiedad conocida: el espín. Lo importante, realmente es considerar que el físico sabe que las partículas tienen, efectivamente, una propiedad pero que no tiene ni la más remota idea de saber qué resultados va a obtener. Quedémonos por el momento con que el físico está aplicando un test que arroja como resultados una batería de valores aleatorios que oscilan entre + ó -. Ésa es la verdadera analogía con el test del psicólogo: ¿está el resultado de esta propiedad, el espín, concreta, fija, antes de la medición? ¿Es + ó – antes de que la mida? ¿Cuándo y por qué se obtienen los distintos resultados?

Está en la misma situación que el psicólogo cuando estudiaba a los sujetos individualmente. ¿Qué está pasando? El físico también está perdido.

Del mismo modo en que hizo el psicólogo, ahora el físico prueba a realizar medidas por parejas de protones a los que se les ha inducido un cierto estado de emparejamiento[20], de estado compartido, *entrelazado*; una suerte

[20] En física de partículas cuando el estado de los espines de dos partículas, por ejemplo, electrones, están correlacionados a partir de la emisión de éstos desde un mismo y compartido estado cuántico que debe conservar su momento angular, se dice que estos electrones resultantes que han podido alejarse en el espacio una distancia indeterminada (en teoría indeterminada; tecnológicamente aún no se ha conseguido que sea mayor a una magnitud de en torno a los $10^5\ m$) permanecen en un estado *singlet* compartido (ahora veremos qué es esto). En la notación de Dirac esto se representa como:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

Esta posibilidad de separar, en teoría, una distancia indefinida un par de partículas entrelazadas es la clave fundamental del denominado fenómeno de entrelazamiento cuántico.
Un estado *singlet* compartido consiste en un par de entidades (no necesariamente la misma) lo suficientemente pequeñas como para que muestren comportamiento cuántico (por ejemplo, un protón o un electrón) y de cuyo estado se pueden predicar las siguientes propiedades:

a. Los espines de las dos entidades deben ser de igual magnitud (valor absoluto).
b. Los valores de los espines de ambas entidades se originan en estado cuántico simple bien definido mediante la función de onda de Schrödinger, partiendo de una disposición en el que ambas entidades están cercanas, en sentido clásico, una de la otra tanto espacial como temporalmente.
c. La función de onda describe el estado cuántico *singlet* de ambas entidades de manera que el momento angular del mismo sea igual a cero. Esto significa que cuando las entidades se separen una distancia, en teoría, indeterminada y se mida experimentalmente el espín, en el mismo eje, en cada una de ellas, los valores que se recojan deben presentar una perfecta oposición para conservar el momento angular del sistema. Es decir, como el momento angular del sistema es igual a cero, las entidades deberán presentar valores de +1 y/o -1 para conservar el momento del sistema global.
d. El estado, aunque difuso (ya lo veremos) del espín de cada entidad debe permanecer inalterado, con independencia de la distancia a la que se alejen ambas, desde el origen de su emisión hasta el momento de su medición. Y esta distancia podría ser tan extensa (en teoría) que es imposible que se comuniquen entre ellas a la velocidad de la luz para transmitirse información que haga que la correlación negativa observada sea producto de dicha comunicación.

Busquemos una analogía para este fenómeno. Imaginemos que tenemos dos bolas de billar muy peculiares (de hecho, no pueden ser bolas y, además, deberían tener una escala del orden de la constante de Planck). Ambas bolas son grises. Cuando están juntas, efectivamente, miramos el sistema formado por las dos bolas conjuntamente y, ciertamente, es gris. Vemos un manchurrón gris. Además, como es intuitivo, el sistema debe permanecer gris siempre (siempre que no se modifique dicho estado). En un momento determinado empaquetamos las dos bolas grises en dos cajas opacas y separamos 10 kilómetros a una de la otra. 5 Kms. hacia el oeste, donde vive Alice, y 5 Kms. al este, donde vive Bob. Una vez que cada una de ellas haya llegado a su destino, pedimos a Alice, que ha recibido una de ellas, que abra la caja y mire la bola de billar de su interior. Resulta que al abrirla encuentra que la bola es negra (de momento no nos paramos a analizar qué extrañeza ha sucedido por el camino; sólo nos centramos, por el momento, en que la bola es negra). Alice, que algo sabe de física cuántica, podrá inducir que la caja que se mandó a Bob contendrá una bola blanca ya que el sistema globalmente debe permanecer gris.

Fijémonos ahora, de nuevo, en la notación de Dirac. Ahora podemos comprenderla mejor:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

de estado en el que los protones se comportan como hermanos siameses que pudieran separarse conservando el vínculo, como un estado análogo al matrimonio que estudiaba el psicólogo. En el experimento del físico, los protones entrelazados en estado *singlet* están inicialmente juntos. En un momento determinado se procede a separarlos enviándolos en sentido opuesto y se somete a cada uno de ellos al test que medía el espín sobre un mismo eje. Es decir, en ambos casos, a izquierda y derecha, se va a medir el espín, por ejemplo, en el eje A.

Del mismo modo en que le sucedía al psicólogo con los miembros de las parejas, el físico observa una contumaz y muy sorprendente correlación negativa (correlación +1/-1)[21] en las mediciones. El físico, en un primer momento, naturalmente, seguramente piense de la misma manera en que lo hacían el psicólogo y Einstein: "aquí hay alguna variable oculta que se está escapando al estudio".

¿Se puede hacer un experimento de este tipo a escala cuántica? Sí, hace tiempo que sí. Se puede medir[22], en cualquier eje arbitrario, la componente del espín de una partícula. Además, el físico observa que da igual el eje elegido (A, B o C) a la hora de medir: el resultado será siempre dicotómico; es decir, se observa una correlación negativa perfecta entre los dos protones entrelazados que se separan cuando se les mide el espín en el mismo eje. Si dos protones emparejados se separan arbitrariamente y se mide en ambos la misma componente, sobre el mismo eje, el resultado es invariablemente + para uno y - para el otro. El físico, como el psicólogo, no sabe qué resultado arrojará el test para cada protón, pero la correlación negativa está asegurada inductivamente.

Hasta aquí, el físico, ha procedido de una manera muy similar a la del psicólogo y empieza a extraer las mismas conclusiones que éste: debe haber una propiedad definida que se escapa a nuestro conocimiento o bien porque

---

El espín del sistema está definido como "arriba/abajo" menos "abajo/arriba", es decir, neutro (tantos "arribas" como "abajos"). Y así debe quedar. Si el espín de una entidad se concreta como "arriba", el otro, para mantener el estado neutro del conjunto, deberá ser "abajo".

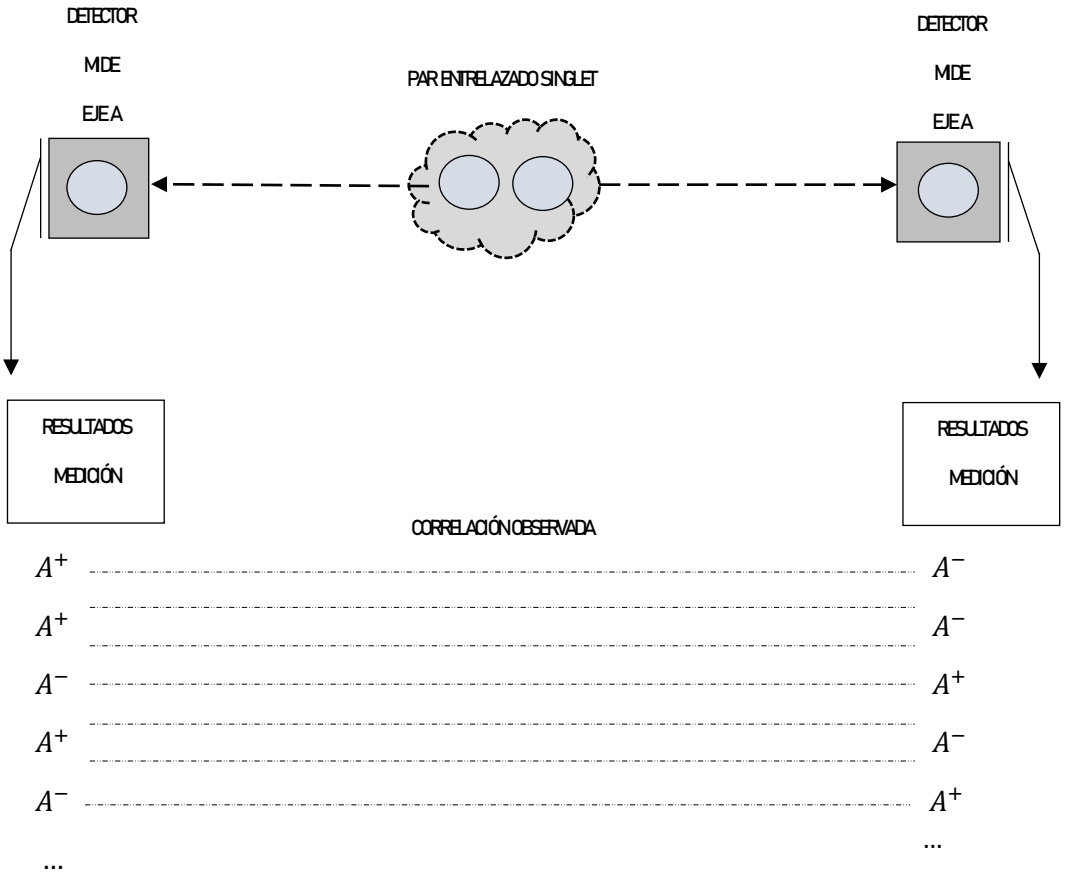
[21] Si el momento angular del sistema conformado por el par de protones emparejados es cero, necesariamente, uno de ellos debe tener espín +1 y el otro un valor de espín -1 que anule al primero para que se conserve el momento nulo del sistema global.
Por otro lado, es interesante traer aquí que el espín de una partícula es un observable que se mide en bases vectoriales, normalizadas y que no tienen por qué ser sistemas ortogonales (más adelante se entenderá esto mejor).

[22] Aunque sólo una vez en la misma entidad.

hay variables ocultas que no estamos considerando o bien porque las partículas están conectadas de alguna manera exótica que hace que se comuniquen de algún modo entre ellas de manera instantánea e independientemente de la distancia que las separe o bien porque la manifestación de la propiedad sólo surge cuando se procede a realizar la medición y no antes.

Sigue, una y otra vez, realizando el mismo experimento y siempre, absolutamente en todas las ocasiones, obtiene resultados correlacionados negativamente. Para ilustrarlo gráficamente usemos la siguiente notación: si un detector mide en el eje A la componente del espín del protón y obtiene valor positivo/negativo, usaremos la expresión para recoger el resultado: $A^+$ó $A^-$. Para los otros ejes, igualmente: $B^+$ ó $B^-$ y $C^+$ ó $C^-$.

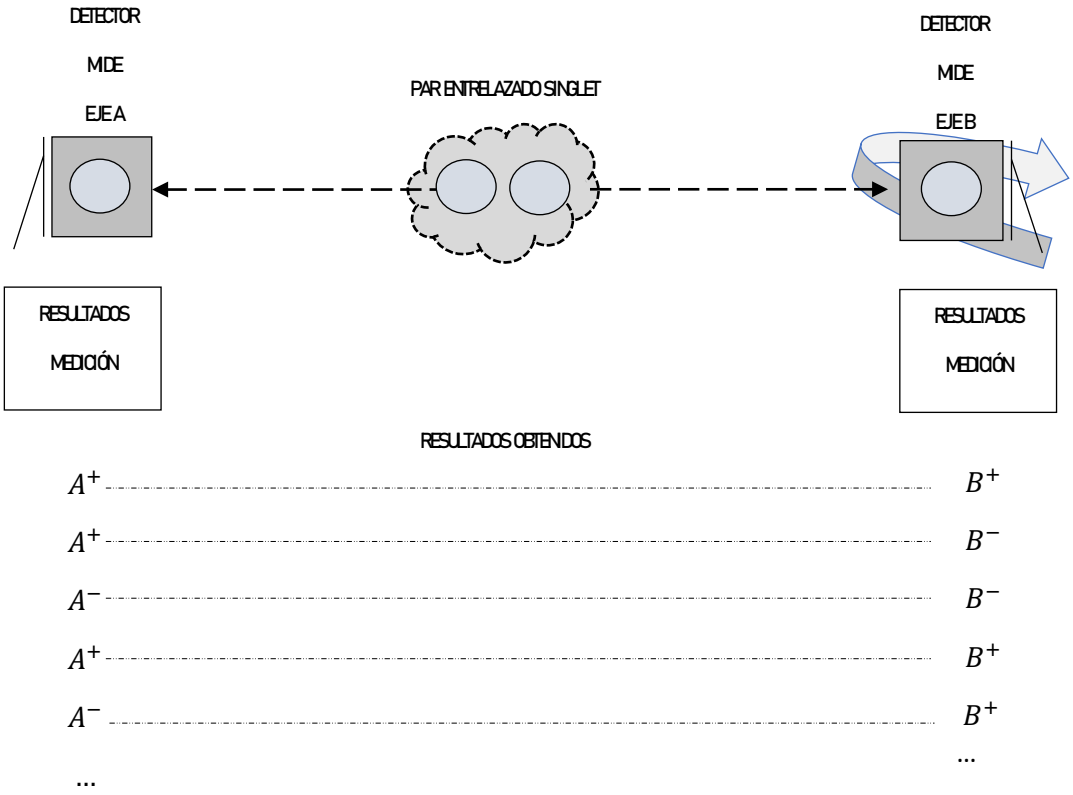
Así, el físico realizará experimentos de este tipo:




Llegados a este punto, el físico introduce una variación en el experimento tratando de obtener información adicional. Aquí, en cierta

medida, el investigador empieza a alejarse del escenario del psicólogo y, con ello, de las teorías realistas-locales que asumen las premisas de Realidad/Localidad/Inferencia[23].

Dicha variación consiste en medir la componente del vector espín a izquierda y derecha sobre ejes diferentes. Los detectores podrán rotar y, así, medir en ejes diferentes según nuestra intención. Por ejemplo, supongamos que medimos a la izquierda la componente en el eje A y a la derecha la componente en el eje B.




A priori, entre las medidas obtenidas en ejes diferentes a izquierda y derecha no hay, en apariencia, relación alguna. Los resultados vuelven a ser azarosos. A priori aceptemos que no existe relación entre los valores obtenidos en el eje A y los obtenidos en el eje B[24].

[23] Ciertamente, a nada que uno reflexione verá que se sigue en el mismo campo de teorías realistas-locales pero, también, hay que asumir que se están dando firmes pasos, precisamente, para alejarnos de éstas.

[24] Existen modos de inducir estados en los que la probabilidad de resultados en un eje y en otro sean el resultado de cierta relación. Pero esto no es en absoluto útil para nuestro objetivo en este momento. Algo veremos más adelante.

Llegado a este punto de su investigación, el físico anotará los resultados de estas mediciones según la siguiente convención:

1. Para referirse al número de *par de partículas*[25] que, por ejemplo, han tenido como resultado $A^+$ a la izquierda y $B^+$ a la derecha, usará:

$$n[A^+B^+]$$

Recordemos: nos estamos refiriendo al par de partículas como unidad mínima de análisis.

2. Por otro lado, cuando el físico quiera referirse a los *protones como individuos*, a los de la izquierda o los de la derecha, usará esta otra nomenclatura[26]:

$$N(A^{\pm}B^{\pm})$$

Ahora, y estas son las particularidades de la mecánica cuántica, tengamos en consideración la correlación cuya inferencia inductiva hemos consolidado mediante los resultados obtenidos estudiando pares de protones medidos sobre el mismo eje. Así, en el ejemplo de conteo del par que hemos propuesto arriba, $n[A^+B^+]$, sabemos que si medimos $A^+$ en el protón lanzado a la izquierda, en el de la derecha, en ese eje, habrá arrojado un resultado de $A^-$; y lo sabremos sin tener que *molestarlo* con mediciones[27]. También sabemos que si en la derecha hemos medido $B^+$, en la izquierda habrá un protón con resultado de espín $B^-$ sin necesidad de medirlo. Es decir, midiendo una sola vez en el protón, podemos conocer dos datos acerca de él.

Es decir, podemos decir que un par definido como:

$$n[A^+B^+]$$

[25] Importante: aquí es el par de partículas. Las dos formando un uno.

[26] Nótese que para el caso concreto usamos una N mayúscula y paréntesis versus la minúscula y los corchetes para el par.

[27] En mecánica cuántica no se puede medir dos veces en el mismo protón porque, en la primera medición ya ha colapsado, perdiendo su estado de superposición. Más adelante se verá esto con más claridad.

Aglutinará casos concretos izquierda y derecha respectivamente:

$$N(A^+B^-) \text{ y } N(A^-B^+)$$

Naturalmente, existe una *proporcionalidad estadística* entre los valores que adoptarán las expresiones, por ejemplo, para el número de partículas concretas de la izquierda con espín $(A^+B^-)$ y la expresión para los protones como par $n[A^+B^+]$.

Pero podemos ir más allá. Imaginemos que tenemos, efectivamente, un par de protones entrelazados, que hemos separado y que hemos medido con nuestros detectores rotadores que miden en dos ejes diferentes (A y B). Tendremos un número protones concretos, por ejemplo, con esta configuración de espines:

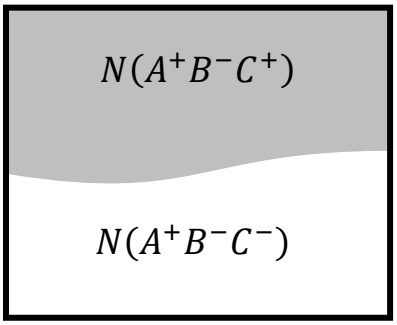
$$N(A^+B^-)$$

No hemos medido la tercera componente en el eje C, pero sabemos que, por la propia naturaleza del espín, sólo puede tener dos valores: $C^+$ o $C^-$. Es decir, podremos decir que, dentro del conjunto de protones $N(A^+B^-)$, podemos encontrarnos dos tipos de protones: $(A^+B^-C^+)$ y $(A^+B^-C^-)$. Es decir, podemos afirmar que:

$$N(A^+B^-) = N(A^+B^-C^+) + N(A^+B^-C^-)$$

Es decir, el conjunto $N(A^+B^-)$ es la suma de los dos subconjuntos $N(A^+B^-C^+)$ y $N(A^+B^-C^-)$.

$$N(A^+B^-)$$



Podemos proceder igualmente con el esto de combinaciones de ejes diferentes cogidos de dos en dos[28]. Por ejemplo:

$$N(A^+C^-) = N(A^+B^+C^-) + N(A^+B^-C^-)$$

Y como deductivamente sabemos que el todo, necesariamente[29], debe ser mayor o igual[30] que la parte, podemos decir que:

$$N(A^+C^-) \geq N(A^+B^-C^-)$$

Procediendo de la misma manera podemos decir que:

$$N(B^-C^+) = N(A^+B^-C^+) + N(A^-B^-C^+)$$

Y, por el mismo proceso deductivo, afirmar que:

$$N(B^-C^+) \geq N(A^+B^-C^+)$$

Recordemos ahora una de nuestras primeras expresiones:

$$N(A^+B^-) = N(A^+B^-C^+) + N(A^+B^-C^-)$$

Y pongámoslo junto a esto que acabamos de decir justo antes:

$$N(B^-C^+) \geq N(A^+B^-C^+)$$
$$N(A^+C^-) \geq N(A^+B^-C^-)$$

[28] AB, AC y BC.

[29] Al menos en el mundo clásico. Ya veremos que, precisamente, tratando de forzar la veracidad de esta desigualdad, llegamos a un escenario en el que la parte puede llegar a ser mayor que el todo, rompiendo así con las teorías científicas realistas/localistas.

[30] Resulta obvio que $N(A^+C^-) = N(A^+B^-C^-)$ sólo cuando $N(A^+B^+C^-) = \varnothing$.

Y vemos que entonces podemos reescribir esto:

$$N(A^+B^-) = N(A^+B^-C^+) + N(A^+B^-C^-)$$

Como esto otro[31]:

$$N(A^+B^-) \leq N(B^-C^+) + N(A^+C^-)$$

Y puesto que sabemos que las observaciones de protones por separado guardan una proporción con el conteo como pares de protones, podemos afirmar que:

$$n[A^+B^+] \leq n[B^+C^+] + n[A^+C^+]$$

Que es justamente la formulación de la Desigualdad de Bell[32].

Esta desigualdad, en el Mundo clásico, al amparo de las teorías realistas/localistas debe cumplirse estrictamente. Es decir, en un escenario en el que dos entidades tienen una propiedad que se manifiesta de manera bien definida antes de la medición y que no pueden influenciarse mutuamente una vez se han separado espaciotemporalmente, esta desigualdad debe cumplirse sin excepción posible. La ruptura de esta desigualdad nos aventura en un mundo muy raro: un mundo en el que las partículas se están comunicando los mutuos resultados a distancia y a velocidad supralumínica y/o que tienen propiedades no manifestadas antes de ser medidas. Así parece ser el mundo de la mecánica cuántica, y así lo atestiguan innumerables experimentos.

---

[31] Obviamente si $N(A^+B^-) = N(A^+B^-C^+) + N(A^+B^-C^-)$ y resulta que $N(A^+C^-) \geq N(A^+B^-C^-)$ y $N(B^-C^+) \geq N(A^+B^-C^+)$, necesariamente el primer término debe ser menor o igual que la suma de los dos componentes del segundo término.

[32] El único modo en que esta desigualdad no se cumpla en el mundo clásico es que, por una pura casualidad estadística sólo sucedan partículas con componentes de espín $(A^+B^+)$. Obviamente la probabilidad de que eso suceda tiende a cero según se incrementa el número de pares de protones medidos.

Para romper esta desigualdad se han realizado incontables mediciones en pares de entidades construyendo sistemas en los que los ángulos entre los ejes estén dispuestos específicamente para obtener valores que permitan maximizar la diferencia entre las teorías realistas/localistas y la mecánica cuántica. Y, efectivamente, dicha desigualdad ha sido rota innumerables veces experimentalmente.

La ruptura de las Desigualdades de Bell, por otro lado, también se han usado para defender posturas absolutamente delirantes sobre la realidad. El objetivo de este texto es, precisamente, exponer que en la escala cuántica las cosas son extrañas, sin duda, pero no incompatibles con lo que ya conocemos para el mundo clásico. Entre ambos mundos hay una *transición blanda*.

*PROPOSITIO XXVII: Res quæ a Deo ad aliquid operandum determinata est, se ipsam indeterminatam reddere non potest.*

*DEMONSTRATIO: Hæc propositio patet ex axiomate tertio.*

*"Ethica, ordine geometrico demonstrata".*

*Benedictus de Spinoza*

## Sección II.

## Las desigualdades de Bell.

## El Mundo clásico.

Construyamos ahora, con más detalle, las desigualdades de Bell en su forma CHSH. Para ello, inicialmente imaginemos que tenemos acceso a dos observables, algo así como dos propiedades medibles, de un sistema. Imaginemos que estamos observando un par de partículas que forman un sistema que presenta dos observables y que cada uno de ellos pueden arrojar, tras la medición, resultados dicotómicos del tipo +1 y -1.

Los observables que se suelen medir en el mundo cuántico son el spin del electrón, el estado energético, la polaridad de la luz, etc… En este caso vamos a simplificar el sistema, vamos a hacerlo clásico para avanzar en la comprensión de las ideas que queremos recoger en este texto.

Las partículas que conforman nuestro sistema compuesto tienen dos observables, cada uno de los cuales puede arrojar dos valores diferentes:

- Observable (propiedad) (F) Forma: cuadrada o redonda.

- Observable (propiedad) (C) Color: blanco o negro.

Y asociamos los valores $\pm 1$ a cada resultado del observable:

- (F) Forma: ◯ $+1$ / □ $-1$

- (C) Color: $Blanco + 1$ / $Negro - 1$

Supongamos que ambas partículas están espacialmente una junto a la otra y que las separamos, a izquierda y derecha, una distancia indeterminada para, posteriormente, medir el estado final del sistema. Veamos qué posibles combinaciones de resultados nos podemos encontrar cuando midamos el estado del sistema[33].

*Véase tabla de la siguiente página*

[33] Obviamente, por simple combinatoria, tenemos dos observables que pueden tomar dos valores, sabemos que el resultado de todas las combinaciones posibles será de 4·4 = 16 opciones con una probabilidad de 1/16 cada una de ellas.

| RESULTADO IZQUIERDA | RESULTADO DERECHA | % |
|---|---|---|
| F-1C+1 □ | F-1C+1 □ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C-1 ■ | F-1C+1 □ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C+1 □ | F-1C-1 ■ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C-1 ■ | F-1C-1 ■ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C+1 ○ | F-1C+1 □ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C-1 ● | F-1C+1 □ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C+1 ○ | F-1C-1 ■ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C-1 ● | F-1C-1 ■ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C+1 □ | F+1C+1 ○ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C-1 ■ | F+1C+1 ○ | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C+1 □ | F+1C-1 ● | $^{1}/_{16}$ |
| F-1C-1 ■ | F+1C-1 ● | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C+1 ○ | F+1C+1 ○ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C-1 ● | F+1C+1 ○ | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C+1 ○ | F+1C-1 ● | $^{1}/_{16}$ |
| F+1C-1 ● | F+1C-1 ● | $^{1}/_{16}$ |
| | **TOTAL =** | **$^{16}/_{16} = 1$** |

Con esta tabla de posibles resultados, el grupo CHSH propusieron una función[34] que asignara un escalar a dichas posibilidades. Llamemos a esa función *N*:

$$N = FORMA_{IZQUIERDA} \cdot FORMA_{DERECHA}$$
$$+COLOR_{IZQUIERDA} \cdot FORMA_{DERECHA}$$
$$+COLOR_{IZQUIERDA} \cdot COLOR_{DERECHA}$$
$$-FORMA_{IZQUIERDA} \cdot COLOR_{DERECHA}$$

Vamos a simplificarla:

$$N = F_I \cdot F_D + C_I \cdot F_D + C_I \cdot C_D - F_I \cdot C_D$$

Y reordenemos un poco sacando factor común:

$$N = (F_I + C_I)F_D + (C_I - F_I)C_D$$

En este punto sólo podemos encontrarnos con dos casos:

a) $F_I = C_I$ de manera que:

$$N = 2C_I \cdot F_D + (0) \cdot C_D$$

$$N = 2C_I \cdot F_D$$

Así, $N$ sólo puede adoptar valores entre $-2 \leq N \leq +2$ y, por lo tanto, podemos afirmar sobre su valor absoluto que:

[34] Aunque hemos visto cómo se configuran las Desigualdades de Bell, desconozco en detalle el método que emplearon para conformar esta función CHSH. Lo más probable es que sea el producto de la realización de numerosas conmutaciones hasta dar con una combinación útil para seguir avanzando hacia los tests a escala cuántica y buscar ahí la violación de la desigualdad predicha desde el mundo clásico. Digamos que "forzaron" un modelo matemático que les permitiera contrastar una hipótesis de ruptura maximizando, como anteriormente se ha dicho, la distancia entre el paradigma clásico y el paradigma cuántico.

$$N = \pm 2 \rightarrow |N| = 2$$

b) $F_I = -C_I$ de manera que:

$$N = (F_I + C_I)F_D + (C_I - F_I)C_D$$

$$N = (0)F_D + 2C_I C_D$$

$$N = 2C_I \cdot C_D$$

Donde, igualmente, $N$ sólo puede adoptar valores entre $-2 \leq N \leq +2$ y, por lo tanto, podemos afirmar sobre su valor absoluto que:

$$N = \pm 2 \rightarrow |N| = 2$$

Es decir, que si aplicamos esta función a todos los resultados posibles de medición de nuestros dos observables (F y C) con dos resultados posibles (+1 y -1), obtenemos que $|N| = 2$ siempre.

| RESULTADO IZQUIERDA | RESULTADO DERECHA | $N$ | $\|N\|$ |
|---|---|---|---|
| F-1C+1 | F-1C+1 | +2 | 2 |
| F-1C-1 | F-1C+1 | +2 | 2 |
| F-1C+1 | F-1C-1 | -2 | 2 |
| F-1C-1 | F-1C-1 | -2 | 2 |
| F+1C+1 | F-1C+1 | +2 | 2 |
| F+1C-1 | F-1C+1 | +2 | 2 |
| F+1C+1 | F-1C-1 | -2 | 2 |
| F+1C-1 | F-1C-1 | -2 | 2 |
| F-1C+1 | F+1C+1 | +2 | 2 |
| F-1C-1 | F+1C+1 | +2 | 2 |
| F-1C+1 | F+1C-1 | -2 | 2 |
| F-1C-1 | F+1C-1 | -2 | 2 |
| F+1C+1 | F+1C+1 | +2 | 2 |
| F+1C-1 | F+1C+1 | +2 | 2 |
| F+1C+1 | F+1C-1 | -2 | 2 |
| F+1C-1 | F+1C-1 | -2 | 2 |

La cuestión va a ser si esto se cumple así en la escala cuántica. Llegado el momento vamos a ver si esta desigualdad se llega a romper.

El grupo CHSH, en su artículo[35], para buscar esa ruptura, analizaron el *valor esperado*[36] de estos resultados, es decir:

$$\langle N \rangle = p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}$$

Donde:

$$p_n = probabilidad\ de\ que\ salga\ un\ resultado\ (\pm 2)$$

$$N_n = resultado\ obtenido\ (\pm 2)$$

Por lo que, en el caso propuesto por el grupo CHSH, se puede decir que, según nuestro ejemplo:

$$-2 \leq \langle N \rangle \leq +2$$

Y de ello podremos afirmar que:

$$|\langle N \rangle| \leq 2 \quad [37]$$

Demostrémoslo.

Para ello consideremos el simple Teorema de desigualdad triangular según el cual:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

35 "Proposed Experiment to Test Local Hidden-Variable Theories". John F. Clauser, Michael A. Horne, Abner Shimony, and Richard A. Holt. Phys. Rev. Lett. 23, 880 – Published 13 October 1969; Erratum Phys. Rev. Lett. 24, 549 (1970). https://journals.aps.org/prl/abstract/10.1103/PhysRevLett.23.880

36 Una importante propiedad del valor esperado que nos va a ser útil es:

$$\langle N + M \rangle = \langle N \rangle + \langle M \rangle$$

37 Estamos preparando un objeto matemático que fuerce a la realidad a expresar una desigualdad que se cumple en el *mundo* clásico pero no en el *mundo* cuántico. Podríamos decir que estamos *arrimando el ascua a nuestra sardina*. Estamos preparando un caballo de Troya.

Teniendo esto en cuenta, podemos hacer lo siguiente:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq |p_1 N_1| + \cdots + |p_{16} N_{16}|$$

Y puesto que, por otra propiedad del valor absoluto, sabemos que:

$$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$$

Podemos reescribir como:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq |p_1||N_1| + \cdots + |p_{16}||N_{16}|$$

Como sabemos que $|N| = 2$ siempre, podemos rescribir como:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq |p_1| \cdot 2 + \cdots + |p_{16}| \cdot 2$$

Ahora, sacamos factor común:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq 2 \cdot (|p_1| + \cdots + |p_{16}|)$$

Y como las $p_n$ son siempre positivas, podemos quitar el valor absoluto de manera que:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq 2(p_1 + \cdots + p_{16})$$

Y puesto que la suma de todas las $p_n$ es necesariamente 1, concluimos que:

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq 2 \cdot 1$$

$$|p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}| \leq 2$$

$$|\langle N \rangle| \leq 2$$

*Q.E.D.*

Esta expresión, además, puede ser perfectamente generalizable para el número de observables que queramos siempre que, claro está, éstos arrojen dos tipos de resultados +1 y -1.

Si tuviéramos, por ejemplo, cuatro observables A, B, C y D, la función *N-CHSH* que tendríamos sería:

$$N = A_I \cdot C_D + B_I \cdot C_D + B_I \cdot D_D - A_I \cdot D_D$$

$$N = (A_I + B_I) \cdot C_D + (B_I - A_I) \cdot D_D$$

Que también nos arrojaría un resultado de:

$$|\langle N \rangle| \leq 2$$

Es decir, que esto es generalizable para cualquier número de observables que arrojen resultados dicotómicos.

## El Mundo cuántico.

Recordemos que la intención de este texto es meramente ilustrativa, didáctica. Con él no se pretende profundizar en la mecánica cuántica más allá de comprender las Desigualdades de Bell de manera simplificada pero sin perder rigor. Para ello vamos a trabajar siempre con números reales con el fin de evitarnos el engorro de trabajar con números complejos tal y como se hace en Mecánica Cuántica. Sin embargo, y siguiendo las exposiciones de las sesiones del profesor Javier García[38], vamos a proponer sistemas perfectamente funcionales y coherentes. También vamos a evitar usar la notación de Dirac para la caracterización de estados cuánticos:

$$|\Psi\rangle = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

En vez de esta notación, como los estados de los sistemas cuánticos se definen como vectores en espacios[39] vectoriales y podemos usar los conocimientos que hemos adquirido en los *Apuntes de Filosofía Física, Relatividad General*[40], vamos a usar la notación del tipo:

$$\vec{\Psi} = \left(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}\right) = 1/\sqrt{2}\,\vec{e}_1 + 1/\sqrt{2}\,\vec{e}_1$$

Para empezar, vamos a suponer un sistema cuántico formado por dos partículas, con cuatro observables (que arrojan resultados dicotómicos) y que definimos mediante la letra $\Psi$.

Para poder trabajar en Física Cuántica en estas condiciones necesitamos establecer una serie de condiciones previas:

- Hemos de dar una base, en nuestro caso, para un espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ [41].

[38] https://www.patreon.com/ceamontilivi

[39] En realidad Espacios de Hilbert.

[40] Apuntes de Filosofía Física. Relatividad General. Iohannes Svlis.

[41] Es $\mathbb{R}^2$ porque todos los observables van a arrojar resultados de dos valores, en nuestro ejemplo, +1 o -1. Pueden darse observables que arrojen más opciones pero se contienen en espacios de más dimensiones.

- Todo observable[42] tiene asociada una base que debe ser ortonormal, es decir que, en el espacio euclídeo se cumpla que:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

- Los resultados deben estar normalizados, es decir, que:

$$\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi} = 1 \qquad [43]$$

Dicho esto, pensemos en un vector (un estado cuántico):

$$\vec{\Psi} = \Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2 \; donde \quad \Psi_1, \Psi_2 \in \mathbb{R}$$

De manera que definir este vector $\vec{\Psi}$ es encontrar en qué estado se encuentra el sistema cuántico $\vec{\Psi}$:

Y que cumple que es norma 1 (normalizado) ya que se cumple que:

[42] Exponer un observable no es sino proponer una base en un espacio vectorial. En cuántica un observable es una base vectorial ortonormal.

[43] En definitiva, que el escalar que multiplica a la base se normalice dividiendo por el módulo del vector (calculado como hipotenusa por Pitágoras) para que el máximo resultado posible sea 1. Esto debe ser así porque como vamos a trabajar con probabilidades, necesitamos establecer un tope, un 100%, la probabilidad total, el 1.

$$\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi} = (\Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2) \cdot (\Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2) = 1$$

Pues siendo la base ortonormal[44]:

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$$
$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 = 0$$

Resulta obvio que sólo va a sobrevivir $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 = 1$ y, por lo tanto:

$$\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi} = (\Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2) \cdot (\Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2) =$$

$$(\Psi_1 \vec{e}_1 \Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_1 \vec{e}_1 \Psi_2 \vec{e}_2) + (\Psi_2 \vec{e}_2 \Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2 \Psi_2 \vec{e}_2) =$$

$$\Psi_1 \Psi_1 \vec{e}_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \Psi_2 \vec{e}_2 \vec{e}_2 =$$

$$\Psi_1 \Psi_1 \cdot 1 + \Psi_2 \Psi_2 \cdot 1 =$$

$$(\Psi_1)^2 + (\Psi_2)^2 = 1$$

Ahora traigamos al texto el ***Postulado de la medida***.

Supongamos que tenemos un Sistema simple cuántico de una sola partícula y un solo observable A que tiene ligada una base ortonormal:

$$Observable\ A = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$$

Según el valor que arroje la medida de dicho observable (uno / otro, en nuestro sistema propuesto arrojaría +1 / -1) el sistema, la partícula, pues solo se trata de una partícula, colapsará hacia un vector de esa base o el otro. Esto puede ser un poco lioso. Sin prisas. Se aclara en breve.

[44] La base es orto (perpendicular y, por supuesto, linealmente independiente) y normal (1).

Según el Postulado de la medida, si el Sistema cuántico se encuentra descrito por el vector $\vec{\Psi}$, entonces la probabilidad de que al medir un observable, por ejemplo, A, nos arroje un resultado, por ejemplo de nuevo, +1 y el sistema colapse hacia la base $\vec{e}_1$ (que es la base que hemos asociado al valor +1) se calcula mediante ***el cuadrado del producto escalar del vector de la base asociada al valor obtenido en el observable A, por el vector*** $\vec{\Psi}$[45]. Formalmente:

$$p(A = valor_1/\vec{\Psi}) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{\Psi})^2$$

Análogamente:

$$p(A = valor_2/\vec{\Psi}) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{\Psi})^2$$

Y, muy importante, ***tras la medida el sistema estará plenamente descrito*** bien por $\vec{e}_1$, es decir, $\vec{\Psi} = \vec{e}_1$, si la medición del observable A obtenida ha sido el resultado +1 o bien $\vec{\Psi} = \vec{e}_2$ si el resultado es -1. Es decir, al medir, el sistema abandona el estado de superposición y "colapsa" en un estado concreto del observable.

*OBSERVACIÓN.*

*Es importante entender esto bien. El sistema cuántico se define como:*

$$\vec{\Psi} = \Psi_1\vec{e}_1 + \Psi_2\vec{e}_2$$

*El sistema colapsará en $\vec{e}_1$ o en $\vec{e}_2$. Pero antes de medirlo permanece en un estado de superposición con una probabilidad de colapso que está definida por $\Psi_1$ y $\Psi_2$ (que harán su efecto al calcular la probabilidad final), es decir, por el Postulado de la medida, la probabilidad de que colapse hacia $\vec{e}_1$ y $\vec{e}_2$ es:*

$$probabilidad\ de\ que\ el\ Observable\ A\ colapse\ en\ \vec{e}_1$$

$$p(A = valor_1/\vec{\Psi}) = (\vec{e}_1 \cdot \vec{\Psi})^2$$

$$probabilidad\ de\ que\ el\ Observable\ X\ colapse\ en\ \vec{e}_2$$

$$p(A = valor_2/\vec{\Psi}) = (\vec{e}_2 \cdot \vec{\Psi})^2$$

[45] En realidad, en nuestro ejemplo, como los resultados que buscamos son que sean +1 o -1, necesariamente, $\vec{\Psi}$, cuando mida en el observable A, +1 el sistema queda fijado a la base ($\vec{e}_1$) y cuando se mida -1 en el observable A el vector $\vec{\Psi}$ colapsará en la base ($\vec{e}_2$). En todo caso, las componentes $\Psi_1\ y\ \Psi_2$ del vector $\vec{\Psi}$ que describe al sistema simple cuántico son sólo valores que marcarán la probabilidad de que el sistema colapse en $\vec{e}_1$ o en $\vec{e}_2$. Ojo, en la realidad los observables serán estados de energía, spines, cantidades de energía que darán como resultado 5, 2, 80000 o lo que sea. En todo este caso de cuadrados y círculos y blanco y negro hemos decidido valorar los resultados como +1 y -1.

Juguemos ahora un poco con vectores que describan estados cuánticos para ir calentando y acercándonos a nuestro destino. Describamos un sistema cuántico mediante un observable A definido mediante la base canónica:

$$\vec{e}_1 = (1,0) \quad y \qquad \vec{e}_2 = (0,1)$$

Supongamos que el vector está definido como:

$$\vec{\Psi} = \Psi_1 \vec{e}_1 + \Psi_2 \vec{e}_2$$

Donde, por ejemplo:

$$\left.\begin{matrix} \Psi_1 = 4 \\ \Psi_2 = 3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{\Psi} = 4\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$$

Normalizamos $\vec{\Psi}$. El módulo de $\vec{\Psi}$, por Pitágoras, será:

$$\sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

Por lo que podemos decir que $\vec{\Psi}$, ya normalizado[46], es:

$$\vec{\Psi} = \frac{4}{5}\vec{e}_1 + \frac{3}{5}\vec{e}_2$$

Como la base es canónica, conocida por todos, podríamos ahorrarnos escribirla y expresar el vector como:

$$\vec{\Psi} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

[46] $\vec{\Psi} \cdot \vec{\Psi} = 1$

… y decir que el sistema cuántico está en ese estado de superposición de dos estados concretos (las bases). El vector $\vec{\Psi}$ está más cerca de un vector de la base o del otro según las magnitudes de $\Psi_1$ y $\Psi_2$. El sistema se definirá de manera definitiva, se concretará, una vez haya colapsado con la medición del observable A. Mientras tanto está definido como un estado de superposición de estados con probabilidad de decantarse hacia uno y otro según los valores recogidos por $\Psi_1 = 4/5$ y $\Psi_2 = 3/5$:

$$\vec{\Psi} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$$

Veamos ahora un ejemplo en el que vamos a calcular la probabilidad mediante el Postulado de la medida. En este caso la base no va a ser canónica aunque, por supuesto, es ortogonal. Imaginemos el observable A, definido por la base:

$$\vec{a}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\vec{a}_2 = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

*OBSERVACIÓN. Importante, nosotros, en nuestro ejemplo de cuadrados y círculos y blancos y negros, hemos convenido que los resultados de los observables sean +1 y -1. Para no alejarnos demasiado del ejemplo nosotros vamos a suponer que las mediciones energéticas o de spin o momentos angulares o lo que sea que se arrojan al medir el observable A y que hacen que el sistema colapse en $\vec{a}_1$ o en $\vec{a}_2$, según la probabilidad descrita en el postulado de la medida, sea +1 para $\vec{a}_1$ y -1 para $\vec{a}_2$. Es importante que se vea que esto lo hemos elegido arbitrariamente con finalidades didácticas.*

Y que el vector (elegido al azar total) que define su estado es:

$$\vec{\Psi} = \Psi_1\vec{a}_1 + \Psi_2\vec{a}_2$$

$$\vec{\Psi} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$$

Que, normalizado, sería:

$$\vec{\Psi} = \frac{2}{\sqrt{13}}\vec{a}_1 + \frac{3}{\sqrt{13}}\vec{a}_2$$

Y que por el Postulado de la medida, podremos calcular la probabilidad de colapso (en verde) hacia $\vec{a}_1$ como[47]:

$$p(A = +1/\vec{\Psi}) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{\Psi})^2$$

Si tras la medida sale que el observable A del sistema cuántico $\vec{\Psi}$ ha arrojado +1, entonces el sistema quedará fijado a $\vec{a}_1$. Y si colapsa hacia $\vec{a}_2$, y cuyas probabilidades son éstas (en verde):

$$p(A = -1/\vec{\Psi}) = (\vec{a}_2 \cdot \vec{\Psi})^2$$

Será porque previamente el observable ha arrojado el valor -1.

Calculemos las probabilidades. Empecemos con el colapso hacia $\vec{a}_1$.

$$p(A = +1/\vec{\Psi}) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{\Psi})^2$$

Es decir, que la probabilidad de que $\vec{\Psi}$ colapse tras la medida en $\vec{a}_1$ es:

$$(A = +1/\vec{\Psi}) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{\Psi})^2 =$$

[47] Es decir, que al medir el observable A nos arroje un resultado de +1.

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{13}},\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)^2$$

Hacemos el producto escalar entre los dos vectores[48]:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{13}}\right)+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)^2$$

Sacamos factor común:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\cdot(2+3)\right)^2$$

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\cdot(5)\right)^2$$

Como está al cuadrado:

$$\left(\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{13}}\right)\right)^2\cdot(5)^2$$

$$\frac{1}{26}\cdot 25$$

Nos da una probabilidad de:

$$\frac{25}{26}$$

[48] Recordemos se multiplican las componentes de la misma dimensión y se suman los resultados.

… de que el sistema colapse hacia $\vec{a}_1$. Es decir, es muy probable que colapse hacia $\vec{a}_1$ y el observable A haya arrojado en la medida un resultado de +1.

Veamos ahora las probabilidades de que colapse hacia $\vec{a}_2$.

$$(A = -1/\vec{\Psi}) = (\vec{a}_2 \cdot \vec{\Psi})^2 =$$

$$\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)^2 =$$

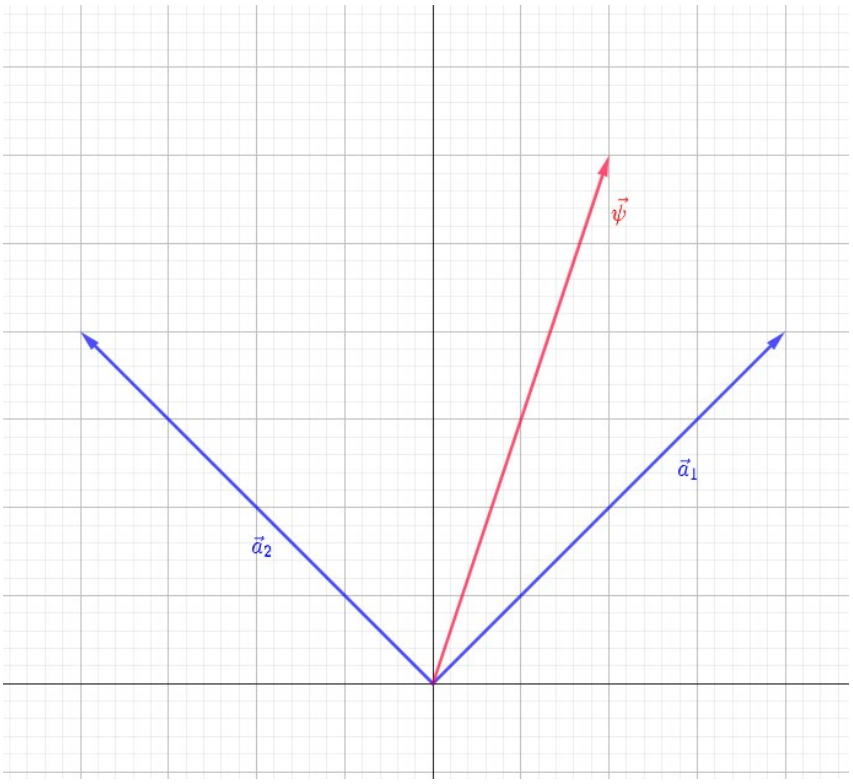
$$\left(\left(\frac{-1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{13}}\right) + \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)^2 =$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{13}}\right)^2 \cdot (-2+3)^2 =$$

$$\frac{1}{26} \cdot (1)^2 = \frac{1}{26}$$

Es decir, es mucho menos probable que el observable A arroje -1 y el sistema, por lo tanto, colapse en $\vec{a}_2$.

Esto gráficamente indica que el Sistema cuántico descrito por el vector $\vec{\Psi}$ está más cerca de colapsar hacia la base $\vec{a}_1$ que hacia la base $\vec{a}_2$.



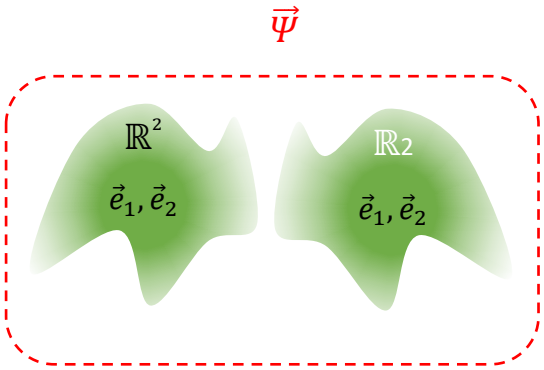

Esto en el Espacio de Hilbert, con los números complejos de por medio, con más dimensiones, es imposible de imaginar o representar visualmente. Sencillamente hay que calcular. Pero para ilustrar lo que hemos estado haciendo y ver cómo funciona realmente el mundo a escala cuántica este ejemplo nos viene de mil maravillas.

Por otro lado, el ejemplo que hemos visto arriba es para un sistema simple, un sistema en el que hay una sola partícula, con un observable y hemos podido intuir cómo se trata matemáticamente el fenómeno de la superposición, la indefinición del sistema antes de la medida[49].

[49] Relacionado con el "realismo" del sistema (concreción de las partículas previamente a la medición).

Ahora vamos a dar un paso más allá para analizar el fenómeno del entrelazamiento[50].

Ahora nuestra $\vec{\Psi}$ debe describir un sistema en el que conviven dos partículas que, para simplificar todo el asunto, tienen un mismo espacio, mismas bases, etc.




Vamos a alejar las partículas y vamos a mirar qué sucede con las Desigualdades de Bell[51].

Tenemos, pues, dos partículas, con dos observables con dos posibilidades $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ cada uno por lo que pasamos de trabajar en un espacio $\mathbb{R}^2$ a trabajar en un espacio $\mathbb{R}^4$ en el que las posibilidades son:

$$\mathbb{R}^4: \{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 \ , \ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 \ , \ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2\}$$

El producto tensorial[52] está definido de manera que se conserven todas las propiedades que hemos definido: ortogonalidad, normalización, postulado de la medida, …

---

[50] Relacionado con la localidad o no localidad del sistema (*spooky action at a distance*).

[51] Realmente vamos a explicitar las Desigualdades CHSH.

[52] Este problema realmente está estrechamente relacionado con el Producto cartesiano. Recordemos de qué iba el asunto. Una moneda arrojada al aire puede dar como resultado bien cara o bien cruz: $\{cara, cruz\}$. Pero un sistema de dos monedas amplia el universo de resultados posibles:

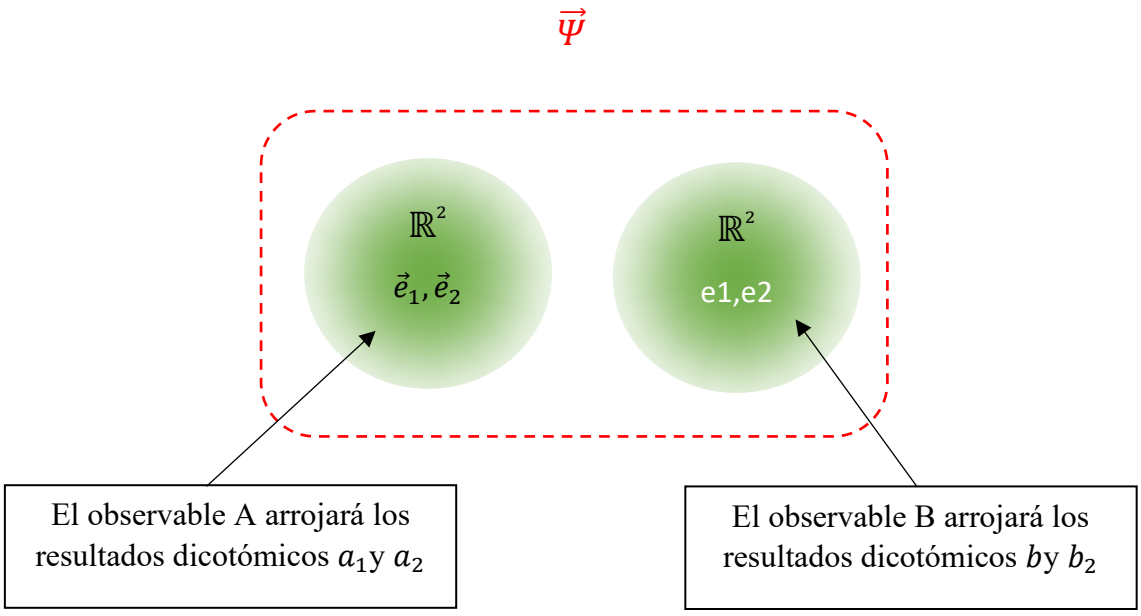
$$\{(cara, cara), (cara, cruz), (cruz, cara), (cruz, cruz)\}$$

Hemos pasado de tener dos posibilidades a tener 4 (obviamente da igual que resultado obtenga la oneda A o la moneda B, es perfectamente simétrico, por eso no son 16).
La generalización del Producto cartesiano a espacios vectoriales se llama producto directo o producto tensorial $\otimes$. Sobre esto hay mucho desarrollado en los Apuntes de Filosofía física, Relatividad General. Aquí usaremos los elementos básicos para poder seguir con la demostración. No va a ser difícil.

Siendo esto así, la descripción del sistema cuántico complejo pasaría a ser la siguiente[53]:

$$\vec{\Psi} = \Psi_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \Psi_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Por otro lado, tenemos ahora dos partículas que se van a separar y sobre las que vamos a medir unos observables, por ejemplo, A en izquierda y B en derecha.




---

El producto tensorial no es más que un producto matricial bastante tedioso de realizar… poco más. Para nuestro caso nos basta con exponer sólo una de sus propiedades. Dados 4 vectores:

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\ y\ \vec{d}\ \in \mathbb{R}^2$$

Resulta que:

$$(\vec{a} \otimes \vec{b}) \cdot (\vec{c} \otimes \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot (\vec{b} \cdot \vec{d})$$

Gracias a esta propiedad podemos garantizar la ortogonalidad de la nueva base:

$$\mathbb{R}^4: \{\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2\ ,\ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1\ ,\ \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2\}$$

Es decir que:

$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) = 1 \cdot 1 = 1$$

Pero:

$$(\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1) \cdot (\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2) = 1 \cdot 0 = 0$$

[53] Véase nota anterior.

De hecho, imaginemos, de hecho, que A y B no son dos observables, sino que construimos un observable que funciona como los *dos activos* a la vez[54]; algo así como un *observable "AB"* y cuyos resultados son el producto de los valores arrojados por cada observable por separado tras medir. Es decir, como estamos definiendo las medidas como productos (podríamos haber seleccionado la suma de estados, pero hemos optado por productos) si podríamos decir que si medimos el observable A en la partícula de la izquierda y nos arroja el valor $A_valor_1$ (que individualmente haría a la partícula de la izquierda colapsar hacia la su base $\vec{a}_1$) y en la derecha medimos el observable B que nos arroja un valor $B_valor_1$(que individualmente haría a la partícula de la derecha colapsar hacia la su base $\vec{b}_1$), podríamos decir que el valor medido es $A_valor_1 \cdot B_valor_1$ y que la base que tiene asociada como "observador conjunto AB" sería $\vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1$.

¿Cómo reflejamos eso matemáticamente? Pues vamos a usar de nuevo el producto tensorial que tan útil es para expresar posibilidades combinatorias de sistemas complejos.

Si el observable $A$ tiene asociada una base $\{\vec{a}_1, \vec{a}_2\}$ y el observable $B$ tiene asociada una base $\{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$, igualmente podremos decir que:

$$A \otimes B \rightarrow \{\ \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_2 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_2\ \}$$

Que, puesto que sabemos que el vector en superposición se concreta en sus bases, son, entonces, los posibles estados en los que habrá colapsado el sistema después de medir.

Es decir, como ya hemos visto, la base asociada al obs. conjunto $A \otimes B$, sería:

$$A \otimes B \rightarrow \{\ \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_2 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_2\ \}$$

Que serán los diferentes estados en los que se encontrará el sistema $\vec{\Psi}$ después de medir.

[54] Esto es absolutamente clave en el fenómeno de la superposición. Es crear un "observable mixto" que se cuente como una propiedad del sistema en su conjunto: un estado *singlet* entrelazado en el que el espín es compartido por dos entidades (ya lo hemos visto). Es tan, tan obvio que incluso me surge la duda de que no sea, en realidad, una Petición de principios; un razonamiento circular. Claro que si creo observables conjuntos, el comportamiento de las partículas es conjunto… pero lo cierto es que experimentalmente se ha observado la acción a distancia por lo que el uso de un observable "mixto conjunto" no es sino un modo de responder a la realidad empírica y no una Petición de principios.

Y ahora el cálculo de probabilidades de colapso según el Postulado de la medida será:

$$p(A = A_{valor_1}, B = B_{valor_1}/\vec{\Psi}) = \left[(\vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1) \cdot \vec{\Psi}\right]^2$$

Esto es una combinación bastante cojonuda de números. En notación simplificada con subíndices podríamos definirla con carácter general como:

$$p(A = A_{valor_i}, B = B_{valor_j}/\vec{\Psi}) = \left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j) \cdot \vec{\Psi}\right]^2$$

Recapitulemos ahora. Tenemos un vector que describe un sistema cuántico complejo:

$$\vec{\Psi} = \Psi_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \Psi_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Y tenemos un "*observable conjunto AB*", $A \otimes B$, con sus bases:

$$A \otimes B \rightarrow \{\ \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_1 \otimes \vec{b}_2 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_1 \quad , \quad \vec{a}_2 \otimes \vec{b}_2\ \}$$

Por lo que podemos calcular la probabilidad de cada una de los posibles estados:

$$\left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 =$$

*OBSERVACIÓN. Dejamos el cuadrado para el final.*

Procedemos a realizar el producto escalar[55]:

$$\left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\Psi_{11}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\Psi_{12}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\Psi_{21}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + (\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\Psi_{22}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Que por la segunda propiedad recogida en la nota 55 y puesto que $\Psi_{kl}$ es un escalar, podemos reescribir como:

$$\left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \Psi_{11}(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{12}(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 + \Psi_{21}(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1 + \Psi_{22}(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,)\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_2$$

Y ahora, por esta propiedad que explicitamos del producto tensorial y según la cual:

$$\left(\vec{a} \otimes \vec{b}\right) \cdot \left(\vec{c} \otimes \vec{d}\right) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \cdot \left(\vec{b} \cdot \vec{d}\right)$$

Podemos reescribir el producto que nos traemos entre manos como:

$$\left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\,) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \Psi_{11}(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_1) \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_1) +$$

[55] Recordemos estas dos propiedades del producto escalar entre vectores y escalares:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\lambda\vec{b}) = \lambda\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\Psi_{12}(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_1) \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_2) +$$

$$\Psi_{21}(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_1) +$$

$$\Psi_{22}(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_2) =$$

No hemos desarrollado los subíndices ij. Si lo hubiéramos hecho (puede ser interesante hacerlo a modo de pasatiempo) la expresión sería tremendamente larga. Ahora, puesto que hemos usado los subíndices para no desarrollar los términos de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, hagamos lo mismo con los de $\Psi$ $y$ $\vec{e}$ . Así, la probabilidad de que se midan determinados resultados en el observable $(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\ )$ en el Sistema cuántico descrito por $\vec{\Psi}$ según el Postulado de la medida es, con carácter general:

$$\left[(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\ ) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \left[\sum_{k,l=1}^{2} \Psi_{kl}\,(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_k) \cdot (\vec{b}_j \cdot \vec{e}_l)\right]^2$$

Esto es laborioso hacerlo. No son más que sumas y multiplicaciones. Nada más. Pero es muy largo y laborioso. Un día que esté aburrido paseando al Frodo o algo así me siento en algún banco del Parque Dunar de Matalasbeach y lo hago.

Llegados a este punto, ¿cuál es el *valor esperado* en la medición del observable $A \otimes B$ de un sistema cuántico complejo descrito por el vector $\vec{\Psi}$? Es decir:

$$\langle A \otimes B\ \rangle_{\vec{\Psi}} = ¿\,?$$

Recordemos cómo definíamos el valor promedio:

$$\langle N \rangle = p_1 N_1 + \cdots + p_{16} N_{16}$$

Es decir, la probabilidad de que se dé un resultado producto escalar por el resultado obtenido. Veamos para el caso de nuestro sistema cuántico complejo:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\vec{\Psi}} =$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_1}\right) \cdot A_{valor_1} \cdot B_{valor_1} \quad (nota)^{56} +$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_2}\right) \cdot A_{valor_1} \cdot B_{valor_2} +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_1}\right) \cdot A_{valor_2} \cdot B_{valor_1} +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_2}\right) \cdot A_{valor_2} \cdot B_{valor_2}$$

Ahora, centrándonos en nuestro caso, en que suponemos resultados +1 y -1 para los observables A y B[57]:

$$A \rightarrow \begin{cases} A_{valor_1} = +1 \\ A_{valor_2} = -1 \end{cases}$$

$$B \rightarrow \begin{cases} B_{valor_1} = +1 \\ B_{valor_2} = -1 \end{cases}$$

Podríamos sustituir en todas las posibilidades:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\vec{\Psi}} =$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_1}\right) \cdot A_{valor_1} \cdot B_{valor_1} +$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_2}\right) \cdot A_{valor_1} \cdot B_{valor_2} +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_1}\right) \cdot A_{valor_2} \cdot B_{valor_1} +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_2}\right) \cdot A_{valor_2} \cdot B_{valor_2}$$

[56] Léase como la probabilidad de que salga la combinación $A_{valor_1}$ al medir el Observable A a la izquierda y $B_{valor_1}$al medir el observable B a la derecha multiplicado por el valor $A_{valor_1} \cdot B_{valor_1}$ que es el que hemos decidido como valor definitivo de la medición para el observable $\langle A \otimes B \rangle$ del sistema cuántico complejo descrito por $\vec{\Psi}$.

[57] Recordemos que ya vimos al principio que esto es generalizable para cualquier número de observables. La cosa está en que todos sean dicotómicos. Si fueran de más resultados posibles, pues nada, a trabajar en un espacio $\mathbb{R}^3$, … , $\mathbb{R}^n$, pero estos resultados siempre serían los mismos.

$$\langle A \otimes B \rangle_{\overrightarrow{\Psi}} =$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_1}\right) \cdot (+1) \cdot (+1) +$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_2}\right) \cdot (+1) \cdot (-1) +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_1}\right) \cdot (-1) \cdot (+1) +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_2}\right) \cdot (-1) \cdot (-1)$$

$$\langle A \otimes B \rangle_{\overrightarrow{\Psi}} =$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_1}\right) -$$

$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_2}\right) -$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_1}\right) +$$

$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_2}\right)$$

Y podemos seguir desarrollando y pasar del observable "clásico"[58]:

$$N = A_I \cdot C_D + B_I \cdot C_D + B_I \cdot D_D - A_I \cdot D_D$$

A su versión cuántica[59]:

$$N = A \otimes C + B \otimes C + B \otimes D - A \otimes D$$

Buscamos su valor esperado:

$$\langle N \rangle = \langle A \otimes C + B \otimes C + B \otimes D - A \otimes D \rangle$$

[58] Véase la forma general para 4 observables de la página 28.

[59] No es necesario especificar izquierda o derecha porque estamos midiendo diferentes observables a izda. o dcha. en partículas que ya se han separado previamente. N sería una especie de súper observable compuesto de muchos observables (A,B,C y D).

Que, por la propiedad para el valor esperado recogida en la nota 36, podemos escribir como:

$$\langle N \rangle = \langle A \otimes C \rangle + \langle B \otimes C \rangle + \langle B \otimes D \rangle - \langle A \otimes D \rangle$$

Y esto, para que sea consistente con el mundo clásico, debería ser:

$$|\langle N \rangle| \leq 2$$

*OBSERVACIÓN MUY IMPORTANTE*

*Si el sistema cuántico lo hubiésemos expresado como*

$$\vec{\Psi} = (\Psi_{11}\vec{e}_1 + \Psi_{12}\vec{e}_2) \otimes (\Psi_{21}\vec{e}_1 + \Psi_{22}\vec{e}_2)$$

*Resultaría que el sistema cuántico cumpliría con*

$$|\langle N \rangle| \leq 2$$

*La explicación es bastante obvia. Al no haber una base correlacionada, una base nueva* $\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2$ *fruto de la unión de dos bases, el sistema se comportaría como perfectamente clásico porque, claro, realmente sería un sistema complejo de dos partículas sino dos sistemas simples de una partícula. No se estaría dando el entrelazamiento que experimentalmente se ha observado.*

Encaminémonos hacia el final. Vamos al caso concreto. Veamos un caso real para ver el resultado de la Desigualdad CHSH.

Supongamos 4 observables A,B,C y D que se van a medir en un Sistema cuántico complejo, claro está, entrelazado y cuyo estado está descrito por el vector $\vec{\Psi}$ del siguiente modo[60]:

$$\vec{\Psi} = \Psi_1\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \Psi_2\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

[60] Hay una serie de estados, los estados de Bell, a los que se denomina como máximamente entrelazados. No entremos en ello. Sencillamente, experimentalmente se han encontrado estados cuyo entrelazamiento es especialmente sólido, robusto, sostenible, perfecto. Éste que ponemos es uno de ellos. Es una cuestión que no nos interesa, por el momento, ni experimental ni teóricamente para alcanzar a conocer la demostración de la no realidad y/o no localidad de los sistemas cuánticos complejos.

Definamos, también, las bases de 4 observables A,B,C y D. Por supuesto va a ser ortonormal[61]:

$$Observable\ A \rightarrow \vec{a}_1 = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\ \ \vec{a}_2 = (-\sin\alpha\,, \cos\alpha)^{62}$$

$$Observable\ B \rightarrow \vec{b}_1 = (\cos\beta\,, \sin\beta)\ \ \vec{b}_2 = (-\sin\beta\,, \cos\beta)$$

$$Observable\ C \rightarrow \vec{c}_1 = (\cos\gamma\,, \sin\gamma)\ \ \vec{c}_2 = (-\sin\gamma\,, \cos\gamma)$$

$$Observable\ D \rightarrow \vec{d}_1 = (\cos\delta\,, \sin\delta)\ \ \vec{d}_2 = (-\sin\delta\,, \cos\delta)$$

Ahora tomemos un atajo. Si quisiéramos calcular:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\overrightarrow{\Psi}}$$

Tendríamos que calcular las probabilidades siguientes:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\overrightarrow{\Psi}} =$$
$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_1}\right) -$$
$$p\left(A_{valor_1}, B_{valor_2}\right) -$$
$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_1}\right) +$$
$$p\left(A_{valor_2}, B_{valor_2}\right)$$

… que las conoceríamos usando esta infernal fórmula que ya dijimos que lo dejamos para cuando estemos muertos de aburrimiento. Ya sabemos que esto no es más que sumar y multiplicar hasta que a uno le dé asco el mundo y desee morir (véase Apéndice I al final).

[61] Preparamos el terreno para que nos sea absolutamente favorable en nuestro intento de romper las desigualdades de Bell.

[62] Para todo $\alpha$ esta base es ortonormal ya que es fácilmente demostrable que $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 1 \ \ y \ \ \vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2 = 0$.

$$\left[\left(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\right) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \left[\sum_{k,l=1}^{2} \Psi_{kl} \left(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_k\right) \cdot \left(\vec{b}_j \cdot \vec{e}_l\right)\right]^2$$

El resultado lo conocemos[63]:

$$\langle A \otimes B \rangle_{\vec{\Psi}} = -\cos(2\alpha - 2\beta)$$

Sabiendo esto, extrapolemos a nuestra expresión. Sólo hay que cambiar los símbolos. Es todo perfectamente simétrico:

$$\langle N \rangle = \langle A \otimes C \rangle + \langle B \otimes C \rangle + \langle B \otimes D \rangle - \langle A \otimes D \rangle$$

$$\langle N \rangle = [-\cos(2\alpha - 2\gamma)] +$$
$$[-\cos(2\beta - 2\gamma)] +$$
$$[-\cos(2\beta - 2\delta)] -$$
$$[-\cos(2\alpha - 2\delta)]$$

Ajustando los signos:

$$\langle N \rangle = -\cos(2\alpha - 2\gamma) - \cos(2\beta - 2\gamma) -$$
$$\cos(2\beta - 2\delta) + \cos(2\alpha - 2\delta)$$

Esto implica que, según la mecánica cuántica, si dos subsistemas (partículas) de dimensión 2 están descritos por el estado global

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

…(en la propia base podemos ver que el sistema está entrelazado), entonces, si elegimos 4 observables A, B, C y D locales (que los observables se miden en los lados y no sobre los dos subsistemas) con bases:

[63] Véase Apéndice I al final.

$$\vec{x}_1 = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\ \ \vec{x}_2 = (-\sin\alpha\,, \cos\alpha)$$

… entonces, el valor esperado es éste:

$$\langle N\rangle_{\vec{\Psi}} = -\cos(2\alpha - 2\gamma) - \cos(2\beta - 2\gamma) - \cos(2\beta - 2\delta) + \cos(2\alpha - 2\delta)$$

Ahora, basta con tomar valores para $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ que consigan quebrar las desigualdades de Bell y CHSH, es decir, valores que fuercen a esto:

$$\left|\langle N\rangle_{\vec{\Psi}}\right| > 2$$

Tenemos el modelo matemático que describe al sistema y ahora buscamos la ruptura total, si es que es posible, de las Desigualdades de Bell en su forma CHSH. Si encontramos valores que cumplan esto… se la hemos liado a Einstein y a nuestra intuición clásica.

Supongamos que $\alpha = 0$

¿Cómo queda la expresión[64]?

$$\langle N\rangle_{\vec{\Psi}} = -\cos(2\gamma) - \cos(2\beta - 2\gamma) - \cos(2\beta - 2\delta) + \cos(2\delta)$$

Y ahora establezcamos estos otros valores[65]:

$$\beta = -\frac{3\pi}{4}$$

[64] Recuérdese de trigonometría que el coseno de algo negativo es igual al coseno de ese mismo algo positivo.

[65] No, no son valores locos que si pongo 2837828798627278137 me salgo con la mía. Estamos hablando de funciones trigonométricas sinusoidales. Estos son datos experimentales volcados sobre una estructura matemática que hemos construido desde cero.

$$\gamma = -\frac{3\pi}{8}$$

$$\delta = -\frac{\pi}{8}$$

Resulta que, lo tenemos:

$$\langle N \rangle_{\vec{\Psi}} = 2\sqrt{2}$$

Es decir, que:

$$¡ \quad \left|\langle N \rangle_{\vec{\Psi}}\right| > 2 \quad !$$

Viola la desigualdad de Bell en su forma CHSH. Ahí es nada. La probabilidad de correlación de medidas en dos partículas alejadas supera el 100%.

Esto implica que la Mecánica Cuántica describe un mundo, a dicha escala, que no puede ser Realista y/o Local al mismo tiempo.

El concepto ***Realista*** (que ya hemos visto que es muy confuso) se refiere a que el estado de una partícula está predefinido antes de ser medido, de ser obligado a colapsar y manifestarse. Está ahí, ya concreto, esperando a ser visto o medido. Sin embargo, la Teoría Cuántica establece que la partícula, antes de ser medida, permanece en un estado de indefinición[66], de superposición que colapsa y se ***concreta*** una vez que lo medimos. Forzamos su concreción. Desconocemos por qué se comporta así la naturaleza, porqué hay más probabilidades, en un estado cuántico no forzado, a que colapse de un modo u otro.

El concepto ***Local*** hace referencia a que, desde el punto de vista de la Relatividad General, nada puede viajar más rápido que la velocidad de la luz. Cualquier cosa que afecte a otra, incluida la transmisión de información a nivel subatómico, no podría sobrepasar la velocidad de la luz por lo que si una partícula de un Sistema cuántico complejo es afectada, la otra no se podría dar por enterada hasta que la información le llegara como máximo a

[66] Aquí, con el estado de superposición, también se hace mucho sensacionalismo y se cometen muchos errores tratando de asemejar los "entes cuánticos" a los "entes macroscópicos". La intuición juega en nuestra contra. Se llega a decir algo así como: es un bicho que es la vez oso y hormiga. No, sería mejor decir que es un bicho con entidad propia: un oso hormiguero (permítaseme el burdo símil). Es más, es un ente que en potencia puede ser dos cosas pero que al final es sólo una de ellas. Una especie de embrión de posibilidades que, al final, se concreta en una forma definida.

la velocidad de la luz. En cambio se ha demostrado que hay una suerte de conexión entre las partículas (igual son una cosa, sustancia, que nosotros percibimos como dos) que hace que la *correlación*[67] *se transmita*[68]

[67] En una primera versión del documento había empleado la palabra "información" pero, sin duda, es un uso erróneo del concepto. Es muy interesante resaltar que, de facto, no hay comunicación de información supralumínica tal y como muy pertinentemente me comentaba Carlos Sabín (https://scholar.google.com/citations?user=GBsr9DIAAAAJ&hl=fr) en la correspondencia que hemos mantenido. Ciertamente no es información de estado lo que se transmite sino una correlación perfecta 1:-1 de estados. Es decir, si Alice observa un colapso, Bob, inmediatamente, observa otro pero, en el proceso, Bob no podría saber qué observa Alice si no se hubiesen reunido antes para compartir la información previa del sistema y las correlaciones que encierra. Esa reunión previa, obviamente, es una reunión "clásica" y lo que después se observa no es tanto información generada como correlaciones esperadas ya previamente.

[68] Esta nota complementa a la anterior. Cuidado que estamos en terreno cenagoso y es importante introducir todos los matices que sean necesarios para que el asunto quede lo más claro posible. En el origen de esta nota hemos resaltado en cursiva la palabra "transmita". ¿Hay transmisión de algo? Para que haya transmisión es necesario que (a) o haya dos cuerpos separados por un espacio o (b) un cuerpo "alargado en el espacio" a través del cual, internamente, se transmite una fuerza, una onda, una corriente, … Llegados a este punto es importante señalar dos cuestiones:

1. Cuando entrelazamos un sistema de partículas lo que realmente estamos haciendo es algo así como convertirlas en un único "objeto". Un objeto deformable, casi al modo de un chicle, cuyos extremos separamos hasta los puntos A y B. Claro, lo que le hacemos al objeto en A, afecta en B porque, lo hemos dicho, se trataría de un mismo objeto (habría un cierto transporte interno de "influencia" si consideramos lo comentado anteriormente en (b) pero, ojo, esto sí sería a velocidad infinita. Así es el comportamiento de los entes en la escala cuántica).

2. No hay nada mágico en que "forcemos" a un sistema cuántico a colapsar, por ejemplo, el spín de un electrón, en una dirección determinada. Algunos dicen:"¡Mirad!¡En el mundo a escala cuántica, el mismo experimentador está forzando a la realidad a manifestarse de un modo determinado!". Extraña sorpresa cuando, en el mundo macroscópico, nadie se sorprende porque la pelota de golf se mueva justo en la dirección hacia la que el jugador ha decidido mandarla.

Además de esto, creo interesante incorporar aquí uno de los correos intercambiados con Carlos Sabín, pues es muy ilustrativo frente a la sorpresa, también, de la transmisión de información de manera inmediata.

Comenta Carlos que:
"Bueno, las correlaciones están ahí desde el principio, desde que se genera el estado cuántico global de Alice y Bob. No se transmiten, porque no son ni de Alice ni de Bob, sino de los dos (no son locales). Esas correlaciones podrán usarse como herramienta para transmitir información, pero siempre tendrán que ser ayudadas por una comunicación entre las partes, que obviamente nunca será instantánea. Si Alice and Bob han acordado un código, han tardado un tiempo un hacerlo, y ese tiempo hay que tenerlo en cuenta.

Ahora bien, ¿cómo de diferente es esto a que tú y yo preparemos lo siguiente? Quedamos en un sitio y hacemos dos pares de papelitos: en dos de ellos pone 0 y en los otros dos pone 1. Ahora cogemos dos cubiletes iguales, en uno de ellos metemos los dos 0 y en otro los dos 1. Hacemos un poco lo de los trileros, moviendo los cubiletes a toda velocidad de un lado para otro, en plan "¿dónde están los ceritos?". Después cogemos uno de los dos cubiletes y metemos su contenido (sin mirarlo) en dos sombreros de pirata, un papelito en cada uno. Ahora yo me llevo un sombrero y tú te vas a surcar los mares del Sur, o lo que sea. Ni tú ni yo sabemos si en nuestro sombrero hay un 0 o un 1. Diremos seguramente que hay una probabilidad del 50% de que haya un 0 y lo mismo para el 1. Lo mismo diremos si nos preguntan por el sombrero del otro. En cambio, en cuanto yo mire lo que hay en mi sombrero estaré completamente seguro de que tú tienes lo mismo. ¡Oh, los misterios de la física cuántica! ¡Transmisión instantánea de información! Pero, un momento, esto no es física cuántica en absoluto. Así que salvo que creamos que se puede violar la relatividad especial con papelitos y sombreritos de pirata, habrá que admitir que lo que nos parecía tan

inmediatamente *rompiendo el principio de localidad*[69]. El caso es que se ha demostrado la no localidad de los fenómenos observados a escala cuántica.

La naturaleza puede ser realista y no local, no realista y local o ni realista ni local pero lo que es seguro es que no puede poseer a la vez las dos propiedades: realista y local.

---

misterioso no lo es en absoluto, y toda la transmisión de información ocurrió cuando tú y yo preparamos el estado del sistema.

¿Estoy diciendo entonces que el entrelazamiento cuántico es exactamente igual que un sistema de sombreros y papelitos? No, pero la diferencia no está en que haya situaciones en las que Bob pudiera conocer el estado de Alice, como erróneamente se dice tantas veces, sino en una propiedad un poco más técnica: en un estado con entrelazamiento cuántico puedes cambiar la base en la que haces la medida (si hablamos de espines, puedes medir la proyección del espín en cualquier dirección espacial) y también obtendrás las mismas correlaciones perfectas. Esto sí que es imposible de conseguir con un sistema clásico. Y esta diferencia es la que hace que el entrelazamiento se pueda usar para hacer cosas que no se pueden hacer con sistemas clásicos, como las que se hacen en información cuántica y computación cuántica. Pero sin romper las reglas bien conocidas de la Física, como la imposibilidad de transmitir información a velocidades superlumínicas.
Saludos,
Carlos."

Muy ilustrativo, sí señor. Es algo así como si Alice y Bob escribieran una carta, el uno al otro, y concertaran abrirla a la vez en un momento dado. ¿Comunicación instantánea? Ciertamente no.
A ello, sin embargo, le añado un giro más. Imaginemos que hay un tercero en discordia: Victor. Victor es un caballero, honorable, sin mala fe, que prepara sistemas cuánticos de partículas entrelazadas. Disocia el sistema enviándolo muchas veces a Alice y a Bob, habiendo acordado sólo en la primera ocasión, el método y el resultado esperado. A partir de la segunda vez, ¿están Alice y Bob comunicándose instantáneamente? La velocidad en la que A y B se están comunicando a través de la arista del triángulo, es menor que la suma del recorrido de la información a lo largo de todo el triángulo…
Claro, Alice y Bob se estarían comunicando en cierta medida. Es cierto, hay que suponer un pacto permanente entre caballeros en el triángulo Alice, Bob y Victor. Recapitulemos. Imaginemos estos dos escenarios:

a. Los papelitos emparejados (azul/rojo) que un agente intermedio, Víctor, introduce en sombreros. Cuando Alice vea que el suyo es azul, sabrá ipso facto, que Bob tiene uno rojo. Es como concertar abrir una carta al unísono.

b. Los papelitos están emparejados, efectivamente, pero en estado de superposición ambos. Víctor ha preparado el sistema, induciéndole el estado de emparejamiento y superposición. Manda una partícula a Alice y otra a Bob. Cuando Alice mida su espín en una base determinada, en ese momento, mediante *influencia* no local, Bob tendrá la correlación negativa en la misma base para su partícula. Se ha llevado a cabo (previamente codificado en la oficina de Victor, eso sí) un proceso de comunicación instantánea.

Es cierto que a todo esto hay que añadir que el estado de entrelazamiento es muy frágil y por el momento, desde luego, no compensa técnicamente. Si las distancias fueran inmensas, y teóricamente nada parece inducir que técnicamente no se pueda acabar logrando, igual empezaba a compensar este tipo de *comunicaciones*.

69 Hay eminentes físicos, como Leonard Susskind, que empiezan a sugerir que realmente están localmente comunicadas mediante agujeros de gusanos (Puentes ER=EPR) provocados por micro agujeros negros, pero esto es ciencia ficción de momento. Plausible, sin duda, pero ciencia ficción.

La no localidad se da por absolutamente indubitable. La no realidad[70] está prácticamente aceptada al 100% y la comunidad científica apuesta claramente por el estado de superposición. Ahora bien, ¿qué procesos naturales están implicados en el proceso de colapso? Aún nos quedan muchos fenómenos por conocer…

Antes de terminar es importante evitar caer en un error muy común. Un error que se reproduce una y otra vez en la mayoría de los artículos divulgativos (¡y muchos específicos!) que he leído a lo largo de varios años. El experimento de John Bell lo que se demuestra es la inexistencia de variables ocultas ***locales***. Esto es fundamental: la imposibilidad de que existan variables ocultas de carácter local. La ruptura de las Desigualdades de Bell en absoluto prueba la inexistencia de variables ocultas *no locales*.

Bell, de hecho, no se sentía muy cómodo con algunas de las conclusiones que se podrían colegir de su Teorema (más allá, por supuesto de la errónea interpretación de la inexistencia de variables ocultas no locales). Él mismo, en una entrevista en la BBC Radio en 1985 afirmaba, en torno al *superdeterminismo*, que:

*"There is a way to escape the inference of superluminal speeds and spooky action at a distance. But it involves absolute determinism in the universe, the complete absence of free will. Suppose the world is super-deterministic, with not just inanimate nature running on behind-the-scenes clockwork, but with our behavior, including our belief that we are free to choose to do one experiment rather than another, absolutely predetermined, including the 'decision' by the experimenter to carry out one set of measurements rather than another, the difficulty disappears. There is no need for a faster-than-light signal to tell particle A what measurement has been carried out on particle B, because the universe, including particle A, already 'knows' what that measurement, and its outcome, will be."*[71]

---

70 Es más, existe una interpretación "*realista*" (mejor decir, "*concretada*", *clásica*) de la dualidad *ondacorpuscular* de los fenómenos cuánticos.: la, en absoluto desdeñable, *Teoría de la Onda piloto* de De Broglie-Bohm.
Hay que estar atento porque a menudo en torno a los fenómenos descritos por la mecánica cuántica se habla de un cierto "indeterminismo" haciendo un mal uso del concepto llegando a generarse, a partir del mismo, verdaderas aberraciones místicas. Nada más alejado de la realidad de la teoría. Es más, ¿por qué un estado cuántico tiene unas determinadas posibilidades de colapsar hacia un lado u otro? ¿Qué y cómo se determina eso?

71 Esto suena ciertamente a un Teorema de Spinoza. El determinismo de Spinoza era un anatema en los años que le tocó vivir… y sigue siéndolo hoy día, no sólo entre los católicos, sino incluso entre gran parte de la comunidad científica. En muchos casos no se acepta ni como mera posibilidad y hay quien considera que debería estar prohibido hacer mención al superdeterminismo rechazando el principio de independencia estadística.
De hecho, ni la física clásica dice que todo es determinismo, ni la física cuántica dice lo contrario. Hay aquí mucha charlatanería y divulgación sensacionalista.

Pero, es importante señalar, incluso más allá de esta postura de Bell (que se centra a un enfoque determinista de nuestro propio comportamiento macroscópico como experimentadores que provocan un colapso como elemento de la cadena causal[72]), una vez asumida la intervención de una fantasmal acción a distancia y redefiniendo el principio causal como no local (aunque no en torno a una acción aleatoria de cualquier causa), sino más bien como una comunicación entre entes más allá de las 3 dimensiones espaciales macroscópicas[73], el principio de Razón Suficiente de Leibniz permanece perfectamente intacto. Esto no es nada extraño: todos asumimos que a partir de la frontera de un horizonte de sucesos de un agujero negro, el espacio y el tiempo no tienen *comportamiento clásico*. En este punto, de hecho, se sigue confundiendo indeterminismo con impredecibilidad. Uno puede leer infinidad de artículos a favor y en contra del carácter determinista, indeterminista, realista, instrumentalista, localista, incompleto, etc… de la mecánica cuántica pero, llegados a este punto, analizando las cartas boca arriba, sin sensacionalismo, sin aspavientos, resulta que el debate no es un debate físico sino semántico. Un debate sobre el uso riguroso de las palabras que usamos en el lenguaje natural. Muchos pensadores se han lanzado al debate precipitado acerca de los resultados obtenidos mediante una serie de herramientas matemáticas aplicadas a la realidad; y lo han hecho sin pararse a establecer definiciones precisas sobre aquello de lo que están hablando. No descubrimos nada nuevo: las revistas, sobre todo las sensacionalistas, se han lanzado a hacer pseudo ciencia ávidas de ventas y suscripciones que incrementen sus lectores en detrimento del rigor de sus publicaciones.

[72] Veáse Sabine Hossenfelder https://arxiv.org/abs/2309.12299

[73] Recuérdense las hipótesis de los micro agujeros de gusano y la existencia de dimensiones espaciales adicionales en el mundo de escala cuántica. Es más, la propia ecuación de Schrödinger podría ser un vector de transmisión no local del contenido de variables ocultas: la información sería holográfica: estaría completa en todos los puntos a la vez.
En este sentido la física cuántica es tan determinista como la clásica: conocidas las propiedades de una partícula en un instante dado, la ecuación de Schrödinger nos dirá las propiedades en cualquier instante futuro. Esas propiedades serán en muchos casos meras probabilidades, pero estarán igualmente determinadas por las probabilidades iniciales. Hay en ello una ligera salvedad; tenemos que tener en cuenta un aspecto adicional: cuando realizamos una medida de una propiedad de un sistema cuántico, el objeto cambia de estado y se concreta, como sabemos, en una de las posibilidades que existían antes de la medida. En este sentido, la ecuación de Schrödinger rige la evolución de la partícula... pero, cada vez que se hace una medida la partícula se "reinicia". Por supuesto, sólo puede reiniciarse a alguna de las posibilidades previstas por la ecuación de Schrödinger según su estado inmediatamente anterior a la medida, y a partir del reinicio, evolucionará de nuevo a partir de la ecuación de Schrödinger.
Véase http://www.investigacionyciencia.es/blogs/fisica-y-quimica/85/posts/determinismo-en-la-fsica-cuntica-15447

# APÉNDICE I

Cálculo de probabilidad de colapso del sistema $\vec{\Psi}$ descrito por el vector:

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

Recordemos que hemos descrito un sistema desde el mundo clásico en el que las partículas adoptan valores concretos antes de la medición y en el que éstas no pueden influenciarse mutuamente a velocidades superlumínicas. Para dicho sistema, tipo cara/cruz (véase nota 52), los observables podrían arrojar los siguientes valores:

$$Observable\ A: \begin{matrix} a_1 = +1 \\ a_2 = -1 \end{matrix} \qquad Observable\ B: \begin{matrix} b_1 = +1 \\ b_2 = -1 \end{matrix}$$

Como sabemos, el valor esperado del "observable conjunto" $\langle A \otimes B \rangle$ vendrá marcado por:

$$\langle A \otimes B \rangle = p(a_1, b_1)a_1b_1 + p(a_1, b_2)a_1b_2 + p(a_2, b_1)a_2b_1 + p(a_2, b_2)a_2b_2$$

Es decir, la probabilidad de que "salga" $a_1$ *y* $b_1$ es de $a_1 \cdot b_1$ más etc, etc…

Si sustituimos por los valores que tenemos asignados

$$\begin{matrix} a_1 = +1 & b_1 = +1 \\ a_2 = -1 & b_2 = -1 \end{matrix}$$

Tenemos que necesariamente, el cálculo del valor esperado será:

$$\langle A \otimes B \rangle = p(a_1, b_1)(+1) + p(a_1, b_2)(-1) + p(a_2, b_1)(-1) + p(a_2, b_2)(+1)$$

Es decir:

$$\langle A \otimes B \rangle = p(a_1, b_1) - p(a_1, b_2) - p(a_2, b_1) + p(a_2, b_2)$$

El valor esperado del observable $\langle A \otimes B \rangle$ será la probabilidad que se obtenga para la combinación $a_1, b_1$ menos la probabilidad de que se obtenga para la combinación $a_1, b_2$, menos la probabilidad de que se obtenga, etc, etc…

En el texto hemos visto que en el mundo cuántico la Desigualdad de Bell en su forma CHSH es mayor de 2, lo cual es una verdadera ruptura con el mundo clásico (al menos tal y como lo teníamos configurado). Hagamos aquí los cálculos que, finalmente, hice un día mientras paseaba con Frodo.

Teníamos que calcular, entonces, este valor esperado en base a estas probabilidades:

$$\langle A \otimes B \rangle = p(a_1, b_1) - p(a_1, b_2) - p(a_2, b_1) + p(a_2, b_2)$$

Y por el Postulado de la medida sabíamos que la probabilidad de colapso de un sistema cuántico complejo era:

$$\left[\left(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\right) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \left[\sum_{k,l=1}^{2} \Psi_{kl} \left(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_k\right) \cdot \left(\vec{b}_j \cdot \vec{e}_l\right)\right]^2$$

Procedamos, entonces, a ello.

§

$$p(a_1, b_1)$$

$$\vec{\Psi} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_1 \otimes \vec{e}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{e}_2 \otimes \vec{e}_1$$

$$\left[\left(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\right) \cdot \vec{\Psi}\right]^2 = \Psi_{kl}(\vec{e}_k \otimes \vec{e}_l)\left(\vec{a}_i \otimes \vec{b}_j\right)$$

Y por la propiedad descrita en la página 25, sabemos que reescribimos como:

$$\left[\sum_{k,l=1}^{2} \Psi_{kl}\left(\vec{a}_i \cdot \vec{e}_k\right) \cdot \left(\vec{b}_j \cdot \vec{e}_l\right)\right]^2$$

Así, para para realizar el producto tensorial correspondiente al caso $p(a_1, b_1)$, dejamos fijos los subíndices i y j, que ya están definidos, y recorremos los índices k y l. Realmente, puesto que sabemos que no hay componentes en que k y l sean iguales, sólo necesitamos recorrer los casos en que k=1 y l=2 y K=2 y l=1.

*OBSERVACIÓN*

*(Recordemos también que para este caso real*

1. $\vec{e}_1$ *es base canónica* $\vec{e}_1 = (1,0)$ *y* $\vec{e}_2 = (0,1)$
2. $Observable\ A \rightarrow \vec{a}_1 = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)\ \ \vec{a}_2 = (-\sin\alpha\,, \cos\alpha)$
3. $Observable\ B \rightarrow \vec{b}_1 = (\cos\beta\,, \sin\beta)\ \ \vec{b}_2 = (-\sin\beta\,, \cos\beta)$

*...)*

$$p(a_1, b_1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_1\right) \cdot \left(\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_2\right) - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_2\right) \cdot \left(\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_1\right)\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha\,, \sin\alpha) \cdot (1,0)\right) \cdot \left((\cos\beta\,, \sin\beta) \cdot (0,1)\right)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha\,, \sin\alpha) \cdot (0,1)\right) \cdot \left((\cos\beta\,, \sin\beta) \cdot (1,0)\right)\right]\right]^2$$

Esto es:

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha)\cdot 1 + (\sin\alpha)\cdot 0\right)\cdot\left((\cos\beta)\cdot 0 + (\sin\beta)\cdot 1\right)\right]\right.$$

$$\left. - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha)\cdot 0 + (\sin\alpha)\cdot 1\right)\cdot\left((\cos\beta)\cdot 1 + (\sin\beta)\cdot 0\right)\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha)(\sin\beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 - 2\left(\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)$$

$$p(a_1, b_1)$$

$$\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)$$

§

$$p(a_1, b_2)$$

$$p(a_1, b_2) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_1)\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (1,0)\right) \cdot \left((-\sin\beta, \cos\beta) \cdot (0,1)\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha, \sin\alpha) \cdot (0,1)\right) \cdot \left((-\sin\beta, \cos\beta) \cdot (1,0)\right)\right]\right]^2$$

Esto es:

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha) \cdot 1 + (\sin\alpha) \cdot 0\right) \cdot \left((-\sin\beta) \cdot 0 + (\cos\beta) \cdot 1\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((\cos\alpha) \cdot 0 + (\sin\alpha) \cdot 1\right) \cdot \left((-\sin\beta) \cdot 1 + (\cos\beta) \cdot 0\right)\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha)(\cos\beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\alpha)(-sin\,\beta)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\sin\alpha)(-sin\,\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} + \frac{(\sin\alpha)(sin\,\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{(\sin\alpha)(sin\,\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 + 2\left(\frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(\sin\alpha)(sin\,\beta)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + (\cos\alpha)(\cos\beta)\,(\sin\alpha)(\sin\beta)$$

$$p(a_1, b_2)$$

$$\frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + (\cos\alpha)(\cos\beta)\,(\sin\alpha)(\sin\beta)$$

§

$$p(a_2, b_1)$$

$$p(a_2, b_1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{b}_1 \cdot \vec{e}_1)\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha, \cos\alpha) \cdot (1,0)\right) \cdot \left((\cos\beta, \sin\beta) \cdot (0,1)\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha, \cos\alpha) \cdot (0,1)\right) \cdot \left((\cos\beta, \sin\beta) \cdot (1,0)\right)\right]\right]^2$$

Esto es:

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha) \cdot 1 + (\cos\alpha) \cdot 0\right) \cdot \left((\cos\beta) \cdot 0 + (\sin\beta) \cdot 1\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha) \cdot 0 + (\cos\alpha) \cdot 1\right) \cdot \left((\cos\beta) \cdot 1 + (\sin\beta) \cdot 0\right)\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha)(\sin\beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha)(\cos\beta)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(-\sin\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[ -\frac{(\sin\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} \right]^2$$

$$= \left[ \frac{(\sin\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} + \frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} \right]^2$$

$$= \left[ \frac{(\sin\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} \right]^2 + \left[ \frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} \right]^2 + 2\left( \frac{(\sin\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} \right)\left( \frac{(\cos\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} \right)$$

$$= \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + (\sin\alpha)(\sin\beta)\,(\cos\alpha)(\cos\beta)$$

$$p(a_2, b_1)$$

$$\frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + (\sin\alpha)(\sin\beta)\,(\cos\alpha)(\cos\beta)$$

§

$$p(a_2, b_2)$$

$$p(a_2, b_1) = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_1) \cdot (\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_2) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\vec{a}_2 \cdot \vec{e}_2) \cdot (\vec{b}_2 \cdot \vec{e}_1)\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha\,, \cos\alpha) \cdot (1,0)\right) \cdot \left((-\sin\beta\,, \cos\beta) \cdot (0,1)\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha\,, \cos\alpha) \cdot (0,1)\right) \cdot \left((-\sin\beta\,, \cos\beta) \cdot (1,0)\right)\right]\right]^2$$

Esto es:

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha) \cdot 1 + (\cos\alpha) \cdot 0\right) \cdot \left((-\sin\beta) \cdot 0 + (\cos\beta) \cdot 1\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\left((-\sin\alpha) \cdot 0 + (\cos\alpha) \cdot 1\right) \cdot \left((-\sin\beta) \cdot 1 + (\cos\beta) \cdot 0\right)\right]\right]^2$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin\alpha)(\cos\beta) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\alpha)(-\sin\beta)\right]^2$$

$$= \left[\frac{(-\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\cos\alpha)(-\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(-\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}} + \frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}} - \frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 + \left[\frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right]^2 - 2\left(\frac{(\cos\alpha)(\sin\beta)}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{(\sin\alpha)(\cos\beta)}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)$$

$$p(a_2, b_2)$$

$$\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)$$

§

Recordemos ahora que buscábamos:

$$\langle A \otimes B \rangle = p(a_1, b_1) - p(a_1, b_2) - p(a_2, b_1) + p(a_2, b_2)$$

Es decir:

$$\langle A \otimes B \rangle =$$
$$\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$
$$-\left[\frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + (\cos\alpha)(\cos\beta)\,(\sin\alpha)(\sin\beta)\right]$$
$$-\left[\frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} + (\sin\alpha)(\sin\beta)\,(\cos\alpha)(\cos\beta)\right]$$
$$\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$

Reordenamos los signos:

$$\langle A \otimes B \rangle =$$
$$\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$
$$\left[-\frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\cos\beta)\,(\sin\alpha)(\sin\beta)\right]$$
$$\left[-\frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} - \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\sin\alpha)(\sin\beta)\,(\cos\alpha)(\cos\beta)\right]$$
$$+\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$

Es decir (fijémonos en los colores):

$$\langle A \otimes B \rangle =$$

$$\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$

$$\left[-\frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - \frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\cos\beta)\,(\sin\alpha)(\sin\beta)\right]$$

$$\left[-\frac{(sin^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} - \frac{(cos^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\sin\alpha)(\sin\beta)\,(\cos\alpha)(\cos\beta)\right]$$

$$+\left[\frac{(cos^2\alpha)(sin^2\beta)}{2} + \frac{(sin^2\alpha)(cos^2\beta)}{2} - (\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)\right]$$

Reordenamos:

$$\langle A \otimes B \rangle =$$

$$(cos^2\alpha)(sin^2\beta) + (sin^2\alpha)(cos^2\beta) - (cos^2\alpha)(cos^2\beta) - (sin^2\alpha)(sin^2\beta) - 4\,(\cos\alpha)(\sin\beta)\,(\sin\alpha)(\cos\beta)$$

Que es la forma trigonométrica expandida de esta forma reducida:

$$-\cos(2\alpha - 2\beta)$$

*Q.E.D.*

*Para llegar a la forma reducida basta con usar, en Mathematica Wolfram Alpha, la función:*

*TrigReduce[cos^2(α)sin^2(β)+sin^2(α)cos^2(β)-cos^2(α)cos^2(β)-sin^2(α)sin^2(β)-4cos(α)sin(β)sin(α)cos(β)]*

*Y obtenemos la expresión reducida sobre una única función (-cos) con ángulo compuesto $(2\alpha - 2\beta)$*

*Las identidades trigonométricas que se emplean son:*

$$\sin\alpha \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)]$$